

應用測量平差法檢算曲線道路中心樁之研究

內政部土地測量局自行研究報告

中華民國九十三年十二月

0 9 3 3 0 1 0 8 0 0 0 0 G 2 0 0 2

應用測量平差法檢算曲線道路中心樁之研究

研 究 人 員：	局	長	吳萬順	
	測繪資訊課	課長	王乃卿	
	測	量	員	湯凱佩

內政部土地測量局自行研究報告

中華民國九十三年十二月

摘 要

在從事地籍測量業務時，經常必須重新檢測都市計畫樁位，包括遺失樁位的補測，或是樁位與地籍圖根控制點的聯測等，由於樁位業已存有先前所測量之坐標，以及曲線道路相關的曲線設計元素（如曲率半徑、切線長）等資料，在重新檢測推算樁位坐標時，必須依據原先的資料來進行，尤其是曲線道路的中心樁，重新測量後必須滿足曲線的一般數學公式，並要符合或近似於原設計之曲線元素值。而實際上，當實測這些已存在之曲線道路中心樁並反推其曲線元素值，並將之落實於地籍圖上幾乎是不可能的，何況部分樁位已經遺失，必須重新根據已知的曲線元素來推算。為徹底解決此一困難，本研究提出以測量平差法來檢算曲線道路中心樁之方法。

要解決一組曲線道路中心樁位實測坐標必須符合（近似）原設計之曲線元素的問題，傳統上乃是利用曲線道路的各中心樁坐標間所存在的數學關係公式，固定其中的某些參數值，帶入公式求出另外的參數，但此種方式作業人員必須不斷的變換固定的參數並調整其數值，以試誤的方式來得出一組較佳的結果，此種做法非常沒有效率，本研究以平差的觀點出發，將問題中之所有樁位坐標、曲線元素以及組成曲線的必要數學公式等視為一平差系統，將樁位坐標當作未知數，透過這些未知數來表達曲線之數學公式及曲線元素，得到許多的條件方程式及觀測方程式，形成一個平差系統，根據最小二乘法的理論，可解算出樁位坐標未知數。

經由程式設計實作測試，本研究成功的以測量平差法完成了單曲線及克羅梭曲線道路中心樁的解算，同時在平差計算的過程中，藉由調整各觀測方程式的權值，可以控制計算結果使其趨向（接近）於使用者所希望的成果。

本文僅針對最常見之圓弧曲線及克羅梭曲線進行探討，未來，應用相同的概念，可進行其它不同曲線道路（有不同的數學式）之推導及解算。

目 次

第一章 前言	1
第一節 研究緣起	1
第二節 研究目的	2
第二章 研究方法與過程	4
第三章 研究發現	13
第四章 效益分析	18
第五章 改進建議	20
附錄	21
參考文獻	25

應用測量平差法檢算曲線道路中心樁之研究

第一章 前言

第一節 研究緣起

目前我國各鄉鎮市區，大部分已實施都市計畫，並依照主要計畫及細部計畫測定都市計畫樁，而許多早期的都市計畫樁測量成果乃是採用 TWD67 坐標系統，更早者甚至為間坐標系統，而經過多年來國家不斷的建設與開發，部分樁位已遭破壞或遺失。因此，為了都市的更新發展，整合國家的土地測量（坐標）成果，在許多相關測量業務上，經常必須辦理都市計畫樁的清理補建及坐標檢測等作業。

辦理都市計畫樁清理補建作業時，遺失樁位的補測及埋樁，可利用先前樁位的測量成果進行反推算並放樣來達成，而如果欲將採用 TWD67（或間）坐標系統的樁位與採用 TWD97 坐標系統的地籍測量的圖根控制點，相互結合成同屬 TWD97 坐標系的坐標，則兩者必須進行聯測，目前實際的作法乃是利用地籍坐標系統中的控制點、圖根點為基準控制，並參照已知的樁位（TWD67 或間）坐標算得之連線距離、方位角、曲線元素等資訊，配合樁位實測資料來產出樁位的 TWD97 坐標。

當進行樁位與不同坐標系統之聯測，或是樁位與同坐標系統但不同控制基準下之重測時，由於所使用的基準控制點已經與當初定樁測量時所用之控制不同，新的測量所得之樁位坐標（由實測或推算而得）分佈位置勢必與原測量成果的樁位坐標分佈位置有些微差異，不過分佈形狀與樁位間之相對位置應該是近似的，即樁位連線之長度應該是相近的、樁位線形成的的夾角角度也是近似的，而曲線道路中心樁也近似符合原設計之曲線元素，然而對於曲線道路中心樁而言，近似符合是不足夠的，因為曲線道路

中心樁之坐標還必須完全符合曲線道路之數學公式，因此測量人員必須對曲線道路中心樁的坐標進行些微的調整，使其能完全符合曲線之數學公式，並且保持與原測量成果（曲線設計元素）有近似的成果，這是一件相當麻煩且不容易的事，必須考慮的問題有曲線之數學條件、原有之曲線設計元素、以及經實測或推算所得的曲線樁位坐標。換言之，必須求出一組曲線道路中心樁坐標，此組坐標必須完全符合曲線基本數學公式，並且與樁位之實測坐標不可差異過大（實務上盡量控制在 2 公分之內），且由此組坐標反推所得之曲線元素必須與原設計之曲線元素相同或近似（依實際狀況調整）。

上述推算曲線道路中心樁的問題，可視為解算一個數學題，其中包含了許多的數學關係（條件）式，解算此問題並不容易，即使是熟練的測量人員亦可能犯錯，常見的錯誤是表面上推算的結果得到與曲線原設計元素相近的值，而實際上卻隱含著樁位間的坐標關係未能百分之百符合所有的數學關係式，此等錯誤不易發現，容易造成潛藏的危機。另外，由於曲線道路中心樁是都市計畫樁的測量業務上經常遭遇的問題，由於此問題解決不易，也是造成業務延遲的主因，本研究即是針對此一問題，嘗試提出一可行的解決方法。

第二節 研究目的

推算曲線道路中心樁的問題，目前實務上是以試誤法來進行，其基本方式是將樁位的坐標及各個曲線元素當作參數（變數），固定某幾項參數值並帶入曲線數學公式，解出另外的參數，不斷的調整各參數值，直到得到一組令人滿意的結果，這樣的方式雖然可以求解，但卻十分耗費人力及時間，而且在實際使用上亦會面臨一相當困難的問題，就是使用者給定參數值的問題，包括給定（固定）那幾項參數值、以及所給定的參數項之間是否可以符合曲線數學式的關係等，由於參數之間存在著多個數學關係（

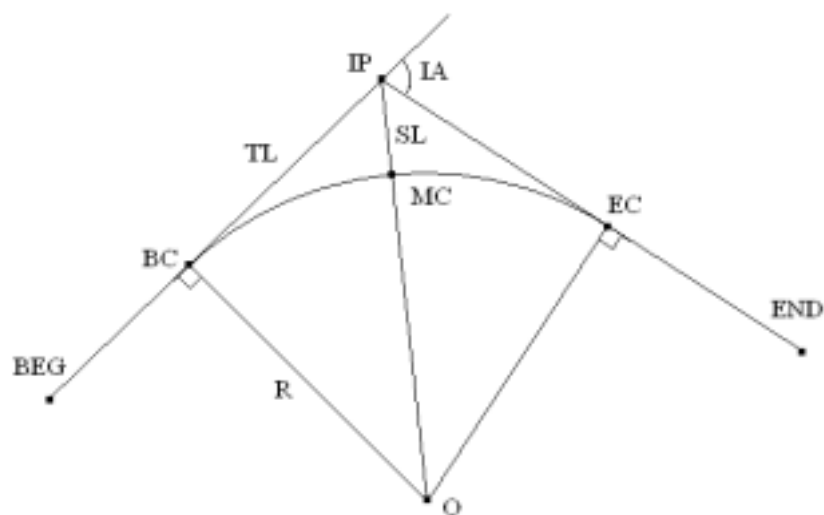
條件)式，在給定參數時如未考慮周密，可能會造成部分數學關係式能滿足而部分則不能滿足，造成求解錯誤，也由於此一因素造成參數值給定的困難。另外，由於參數項目可能多至十數個，控制其中某幾項來求解其他項的選擇變化太多，若要逐一寫成電腦程式來輔助計算，有其困難並且不實用。本研究的主要目的希望能解決上述問題，期能建立合適的數學模型及有效的解算方法，供求解出一組正確的解算結果，最終並希望能將其程式化，發展成實用的解算工具。

由於曲線道路的種類很多，如單曲線、複曲線、反曲線、克羅梭曲線、正弦半波長曲線等等，不同的曲線道路有不同之數學式，其所對應的曲線元素亦不同，故其解算方法各不相同，本文將針對最常見之單(圓弧)曲線及克羅梭曲線進行探討，其他的曲線則可應用相同的概念進行推導求解。

第二章 研究方法與過程

本研究以測量平差之觀點切入，提出利用條件平差之方式來解算曲線道路中心樁的問題，首先將問題中之所有樁位坐標以及由各樁位間所形成之曲線元素、曲線條件等（一些數學關係式）視為一平差系統，其中樁位坐標值為平差系統中待求解的未知數，而未知數（即樁位坐標）與曲線元素值及實測坐標值可形成許多數學關係式，利用這些數學式可得出觀測方程式，另外由樁位坐標與曲線本身之數學公式將可導出許多條件式，並加上其他附加的條件，整體即形成一個條件平差系統，根據最小二乘法的理論，可解出所有的未知數（樁位坐標）。在進行平差計算的過程中，賦予觀測方程式不同的權值，可用來控制解算的成果，亦即可利用調權的方式來達到使用者所期望的成果。以下將進行細節說明：

§ 2-1 單曲線道路



圖一 單曲線示意圖

根據單曲線的數學特性，其所形成之曲線圖形如圖一所示，圖中 O 點為曲率中心，並非實際的樁位，但為了解算上的方便，將其坐標視為未知參數加入平差系統。

參考圖一，可導出單曲線 5 個獨立且必要的條件，分別是

$$(1)、(IP, BC)長度 = (IP, EC)長度$$

$$(2)、(O, BC)長度 = (O, MC)長度$$

$$(3)、(MC, BC)長度 = (MC, EC)長度$$

$$(4)、(IP, BC, O)角度 = \pi / 2$$

$$(5)、(IP, EC, O)角度 = \pi / 2$$

此 5 個條件可以說是單曲線的圖形結構條件，值得注意的是由圖一可直觀的發現存在有 $(O, BC)長度 = (O, EC)長度$ 條件，此條件暫時以 (a) 稱之，但此 (a) 條件並未被列出，其原因乃是當 (1)、(4)、(5) 條件成立時，(a) 必定成立，即 (1)、(4)、(5)、(a) 四條件相依，故僅能由四條件中取三個為獨立條件，類似此種問題，在對不同類型的曲線推導條件式時均須小心注意。

另外，對單曲線道路而言，在大多數的情況下，還有兩個額外的條件必須考量，分別為：

$$(6)、(IP, BC, BEG)三點共線$$

$$(7)、(IP, EC, END)三點共線$$

在 (6)、(7) 兩條件式中，BEG、END 為已知坐標的樁位，而兩條件所代表的意義是 BC 及 EC 分別位在連接曲線道路前後的直線道路方向線上，此兩條件可依實際狀況加入平差系統中（兩者均加入或兩其中之一者加入或兩者均不加入）。就條件 (6) 而言，如已知的資訊是 IP、BC 的方向，也可用 (IP, BC) 方位角=已知值來取代。以上 (1) 至 (7) 式即為單曲線道路之條件方程式。

而有關單曲線道路的觀測方程式，則根據單曲線元素值，包括切線長 (TL)、曲率半徑 (R)、外偏角 (IA)、矢距 (SL) 等等，以及實測（全部或部分）的樁位坐標來形成，可形成的觀測

方程式有：

$$(8)、(IP, BC) \text{ 長度} = TL$$

$$(9)、(O, BC) \text{ 長度} = R$$

$$(10)、(IP, MC) \text{ 長度} = SL$$

$$(11)、(BC, IP, EC) \text{ 角度} = 180 \text{ 度} - IA$$

$$(12)、x_{IP} = x'_{IP} \text{ , 式中 } x'_{IP} \text{ 爲實測坐標值}$$

$$(13)、y_{IP} = y'_{IP} \text{ , 式中 } y'_{IP} \text{ 爲實測坐標值}$$

$$(14)、x_{BC} = x'_{BC} \text{ , 式中 } x'_{BC} \text{ 爲實測坐標值}$$

$$(15)、y_{BC} = y'_{BC} \text{ , 式中 } y'_{BC} \text{ 爲實測坐標值}$$

$$(16)、x_{EC} = x'_{EC} \text{ , 式中 } x'_{EC} \text{ 爲實測坐標值}$$

$$(17)、y_{EC} = y'_{EC} \text{ , 式中 } y'_{EC} \text{ 爲實測坐標值}$$

$$(18)、x_{MC} = x'_{MC} \text{ , 式中 } x'_{MC} \text{ 爲實測坐標值}$$

$$(19)、y_{MC} = y'_{MC} \text{ , 式中 } y'_{MC} \text{ 爲實測坐標值}$$

利用 (1) 至 (19) 式可建立一平差系統，其中 IP、BC、MC、EC、O 五點共 10 個坐標參數即爲平差系統中待求解的未知數。另外一提，在建立平差系統的過程中，(1) 至 (5) 式爲必要的方程式，而其他的方程式則依實際狀況加入或省略，但方程式的總各數必須大於等於 10 個，方能解算 10 個未知數。

所有的條件式 (1) 至 (7) 式及觀測方程式 (8) 至 (19) 式均可利用樁位的 x, y 坐標來表示，亦即所有的式子均可個別寫成以樁位坐標爲參數的函式 $f = f(x_{IP}, y_{IP}, x_{BC}, y_{BC}, \dots) = 0$ 的形式。

條件式 (1)、(2)、(3) 式，根據距離公式，分別可寫成：

$$f_1 = \sqrt{(x_{BC} - x_{IP})^2 + (y_{BC} - y_{IP})^2} - \sqrt{(x_{EC} - x_{IP})^2 + (y_{EC} - y_{IP})^2} = 0$$

$$f_2 = \sqrt{(x_{BC} - x_O)^2 + (y_{BC} - y_O)^2} - \sqrt{(x_{MC} - x_O)^2 + (y_{MC} - y_O)^2} = 0$$

$$f_3 = \sqrt{(x_{BC} - x_{MC})^2 + (y_{BC} - y_{MC})^2} - \sqrt{(x_{EC} - x_{MC})^2 + (y_{EC} - y_{MC})^2} = 0$$

條件式 (4)、(5) 式，根據兩向量垂直其內積等於零，分別可寫成：

$$f_4 = (x_{IP} - x_{BC})(x_O - x_{BC}) + (y_{IP} - y_{BC})(y_O - y_{BC}) = 0$$

$$f_5 = (x_{IP} - x_{EC})(x_O - x_{EC}) + (y_{IP} - y_{EC})(y_O - y_{EC}) = 0$$

條件式 (6) 式，根據兩斜率相等，可寫成：

$$f_6 = (x_{IP} - x_{BEG})(y_{BC} - y_{BEG}) - (y_{IP} - y_{BEG})(x_{BC} - x_{BEG}) = 0 \quad (\text{BEG 坐標已知})$$

條件式 (7) 式，同條件式 (6) 式，可寫成：

$$f_7 = (x_{IP} - x_{END})(y_{EC} - y_{END}) - (y_{IP} - y_{END})(x_{EC} - x_{END}) = 0 \quad (\text{END 坐標已知})$$

類似的方式，觀測方程式可根據距離、角度等公式將其列出，如由 (8) 至 (10) 式可分別寫成：

$$f_8 = \sqrt{(x_{BC} - x_{IP})^2 + (y_{BC} - y_{IP})^2} - TL = 0 \quad (TL \text{ 爲已知})$$

$$f_9 = \sqrt{(x_{BC} - x_O)^2 + (y_{BC} - y_O)^2} - R = 0 \quad (R \text{ 爲已知})$$

$$f_{10} = \sqrt{(x_{MC} - x_{IP})^2 + (y_{MC} - y_{IP})^2} - SL = 0 \quad (SL \text{ 爲已知})$$

由 (11) 式利用角度公式 $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$ 可得到

$$f_{11} = \cos^{-1}\left(\frac{(x_{BC} - x_{IP})(x_{EC} - x_{IP}) + (y_{BC} - y_{IP})(y_{EC} - y_{IP})}{\sqrt{(x_{BC} - x_{IP})^2 + (y_{BC} - y_{IP})^2} \cdot \sqrt{(x_{EC} - x_{IP})^2 + (y_{EC} - y_{IP})^2}}\right) - (\pi - IA) = 0$$

(12) 至 (19) 式可寫成：

$$f_{12} = x_{IP} - x'_{IP} = 0 \quad (x'_{IP} \text{ 爲已知的實測坐標值})$$

$$f_{13} = y_{IP} - y'_{IP} = 0 \quad (y'_{IP} \text{ 爲已知的實測坐標值})$$

$$f_{14} = x_{BC} - x'_{BC} = 0 \quad (x'_{BC} \text{ 爲已知的實測坐標值})$$

$$f_{15} = y_{BC} - y'_{BC} = 0 \quad (y'_{BC} \text{ 爲已知的實測坐標值})$$

$$f_{16} = x_{MC} - x'_{MC} = 0 \quad (x'_{MC} \text{ 爲已知的實測坐標值})$$

$$f_{17} = y_{MC} - y'_{MC} = 0 \quad (y'_{MC} \text{ 爲已知的實測坐標值})$$

$$f_{18} = x_{EC} - x'_{EC} = 0 \quad (x'_{EC} \text{ 爲已知的實測坐標值})$$

$$f_{19} = y_{EC} - y'_{EC} = 0 \quad (y'_{EC} \text{ 爲已知的實測坐標值})$$

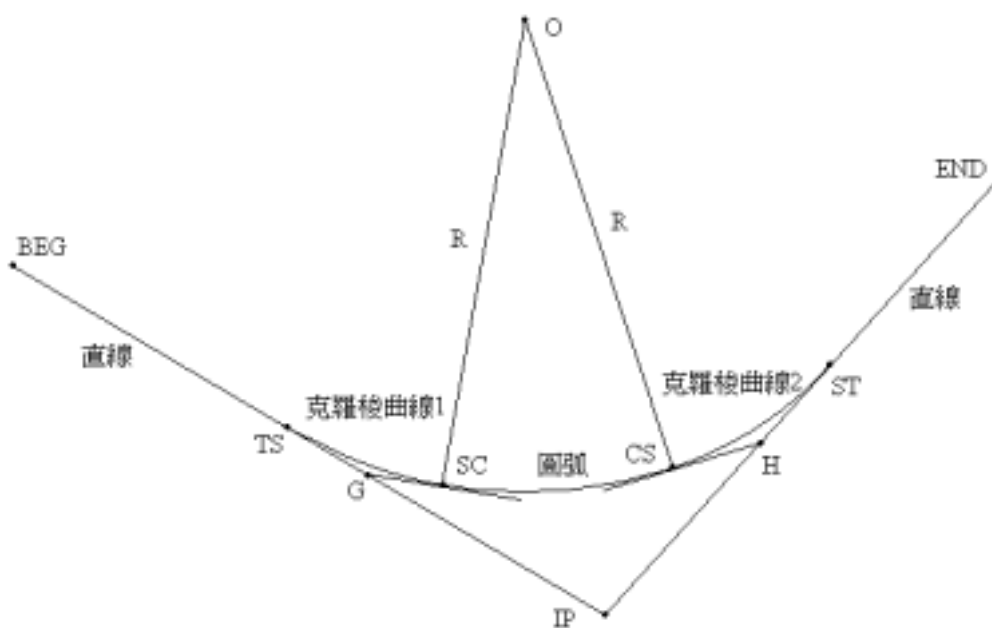
列出所有的函式後，由於所列出的函式 f 之中，部分爲非線性方程式，爲了方便計算求解未知數，採用以泰勒展開式將其線性化，並以疊代漸進的方式進行求解。上述所列的函式中包括有角度函式、長度（距離）函式、弧長函式、共線函式等，在進行線性化時，其相關的偏微分公式請參考附錄。

上述所推導的數學模型爲一帶有條件的間接觀測平差模型，嚴謹的解法應採用帶有條件的間接觀測平差法解之，在本研究

中，爲了程式實作上的方便，並不直接採用此法來求解，而是以間接觀測的平差模式求解，其中將條件式（線性化後的（1）至（7）式）之權值設定爲無限大（由於設限於電腦記錄的能力，實作上是設定成一與（8）至（19）式相對大的值）。

今使用間接平差模式並以矩陣方式表示成 $V=AX-L$ ，其中 A 矩陣之元素爲各個函數對未知數的偏微分係數，而 X 爲未知數矩陣，此時之未知數則是各樁位坐標與近似值之差量未知數，在求解過程中，必須解決初始值的問題，樁位如有已知或實測的坐標則可直接當作初始值，否則必須以其他已知的資料加以推算出近似值，如圖一中之 O 點即是。

§ 2-2 克羅梭曲線道路



圖二 基本型克羅梭曲線道路示意圖

克羅梭曲線道路由克羅梭曲線、直線、圓曲線組成，大致可分爲五大類，即基本型、S型、蛋型、凸型及複合型等五種，其中最常遇到的爲基本型（如圖二所示），本文將針對基本型之克羅

梭曲線道路進行推導，其他類型之克羅梭曲線道路之推導原理相同，不再一一詳述。

圖二中， O 為 SC 至 CS 圓弧段的曲率中心， G 為通過 SC 之切線與 (IP, TS) 直線之交點， H 為通過 CS 之切線與 (IP, ST) 直線之交點， O 、 G 、 H 並非實際樁位，而是在整個平差系統中所引入的三個輔助點，雖然引入這三點會多出六個未知數（三組 X 、 Y 座標參數）須求解，但是可以用較簡易而不複雜的數學式建立起樁位坐標間的方程式，且於後續方程式的偏微分處理也較簡單。

克羅梭曲線之基本公式為 $RL=A^2$ ，其中 R 為克羅梭曲線上某一點 P 之曲率半徑， L 為克羅梭曲線起點至 P 點之曲線長， A 為克羅梭曲線參數（為一固定常數）。

根據克羅梭曲線之公式並參考圖二，可得出基本型克羅梭曲線道路存在有下列的方程式，分別是

$$(1)、(O, SC) \text{長度} = R$$

$$(2)、(O, CS) \text{長度} = R$$

$$(3)、(G, SC, O) \text{角度} = \pi / 2$$

$$(4)、(H, CS, O) \text{角度} = \pi / 2$$

$$(5)、(IP, G, SC) \text{角度} = L_1 / (2R)$$

$$(6)、(IP, H, CS) \text{角度} = L_2 / (2R)$$

$$(7)、(TS, G, IP) \text{角度} = \pi$$

$$(8)、(ST, H, IP) \text{角度} = \pi$$

$$(9)、A_1 \cdot A_1 = R \cdot L_1 \quad (\text{克羅梭曲線 1})$$

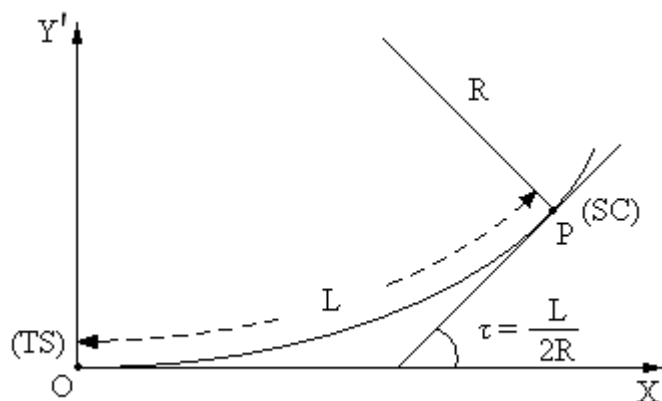
$$(10)、A_2 \cdot A_2 = R \cdot L_2 \quad (\text{克羅梭曲線 2})$$

其中 A_1 為克羅梭曲線 1 之曲線參數， L_1 為克羅梭曲線 1 由 TS 至 SC 之長度， A_2 為克羅梭曲線 2 之曲線參數， L_2 為克羅梭曲線 2 由 ST 至 CS 之長度。

另外，參考圖三所示，定義一個克羅梭曲線的局部坐標系，根據公式的推導，在此局部坐標系下，克羅梭曲線上之任意點的近似坐標公式為：

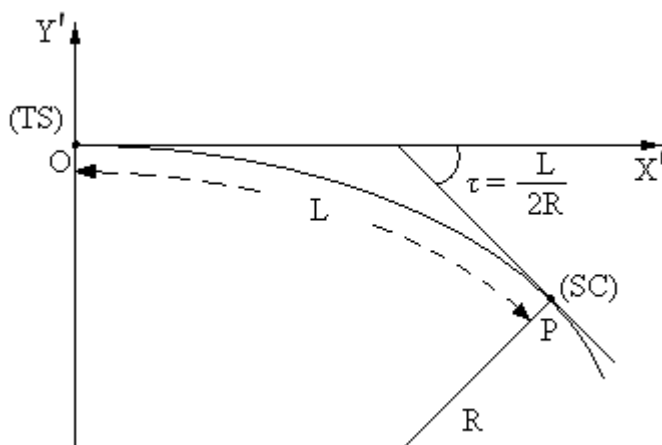
$$x'(A, R) = \frac{A^2}{R} - \frac{1}{40} \cdot \frac{A^6}{R^5} + \frac{1}{3456} \cdot \frac{A^{10}}{R^9} - \frac{1}{599040} \cdot \frac{A^{14}}{R^{13}} + \Delta \quad (2-1)$$

$$y'(A, R) = \frac{1}{6} \cdot \frac{A^4}{R^3} - \frac{1}{336} \cdot \frac{A^8}{R^7} + \frac{1}{42240} \cdot \frac{A^{12}}{R^{11}} - \frac{1}{9676800} \cdot \frac{A^{16}}{R^{15}} + \Delta \quad (2-2)$$



圖三 克羅梭曲線局部坐標系示意圖(A)

如克羅梭曲線之走向如圖四時，則(2-2)式之 Y 坐標值須再乘以 -1。



圖四 克羅梭曲線局部坐標系示意圖(B)

(2-1)、(2-2)為克羅梭曲線的局部坐標系之坐標，相對於實際的坐標系之間存在有三參數（一旋轉參數、兩平移參數）的轉換

關係如下：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(A, R) \\ y'(A, R) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$$x(\theta, \Delta x, \Delta y, A, R) = \cos \theta \cdot x'(A, R) + \sin \theta \cdot y'(A, R) + \Delta x \quad (2-4)$$

$$y(\theta, \Delta x, \Delta y, A, R) = -\sin \theta \cdot x'(A, R) + \cos \theta \cdot y'(A, R) + \Delta y \quad (2-5)$$

將(2-1)、(2-2)代入(2-4)、(2-5)即可得到克羅梭曲線的樁位坐標數學公式，因此 TS、SC、CS、ST 四點之坐標可列出 4 組 x、y 共 8 個方程式：

$$(11) \cdot x_{TS} = \cos \theta_1 \cdot x'(A_1, \infty) + \sin \theta_1 \cdot k \cdot y'(A_1, \infty) + \Delta x_1 = \Delta x_1$$

$$(12) \cdot y_{TS} = -\sin \theta_1 \cdot x'(A_1, \infty) + \cos \theta_1 \cdot k \cdot y'(A_1, \infty) + \Delta y_1 = \Delta y_1$$

$$(13) \cdot x_{SC} = \cos \theta_1 \cdot x'(A_1, R) + \sin \theta_1 \cdot k \cdot y'(A_1, R) + \Delta x_1$$

$$(14) \cdot y_{SC} = -\sin \theta_1 \cdot x'(A_1, R) + \cos \theta_1 \cdot k \cdot y'(A_1, R) + \Delta y_1$$

$$(15) \cdot x_{CS} = \cos \theta_2 \cdot x'(A_2, R) + \sin \theta_2 \cdot (-k) \cdot y'(A_2, R) + \Delta x_2$$

$$(16) \cdot y_{CS} = -\sin \theta_2 \cdot x'(A_2, R) + \cos \theta_2 \cdot (-k) \cdot y'(A_2, R) + \Delta y_2$$

$$(17) \cdot x_{ST} = \cos \theta_2 \cdot x'(A_2, \infty) + \sin \theta_2 \cdot (-k) \cdot y'(A_2, \infty) + \Delta x_2 = \Delta x_2$$

$$(18) \cdot y_{ST} = -\sin \theta_2 \cdot x'(A_2, \infty) + \cos \theta_2 \cdot (-k) \cdot y'(A_2, \infty) + \Delta y_2 = \Delta y_2$$

在(11)至(18)式中的 k 值為 +1 或 -1， k 值的決定乃是根據克羅梭曲線由 TS 到 SC (或 ST 到 CS) 的走向為順時針或逆時針，順時針取 -1，逆時針取 +1 (參考圖三及圖四)。

基本型克羅梭曲線道路結構中有兩條克羅梭曲線 (如圖二所示)，故在解算時有兩組 (θ , Δx , Δy) 未知數，又根據(11)、(12)、(17)、(18)式可得知 Δx_1 、 Δy_1 、 Δx_2 、 Δy_2 即分別是 x_{TS} 、 y_{TS} 、 x_{ST} 、 y_{ST} ，故僅需多加入 θ_1 及 θ_2 兩個未知數，另外，圖二中 O、G、H 並非實際樁位，而是為了計算上的方便而引入的輔助點，O 為曲率中心，G 為通過 SC 之切線與 (IP, TS) 直線之交，H 為通過 CS 之切線與 (IP, ST) 直線之交點。

另外，如同前述單曲線道路，在大多數的情況下，還有兩個額外的條件必須考量，分別為：

$$(19) \cdot (IP, TS, BEG) \text{ 三點共線}$$

(20)、(IP, ST, END)三點共線

在(19)、(20)兩式中，BEG、END為已知坐標的樁位。

整體平差數學模式中，共有23個未知參數，分別為(圖二中之)TS、SC、CS、ST、IP、O、G、H八點共16個坐標參數，以及R、A₁、A₂、L₁、L₂、 θ_1 、 θ_2 計7個參數，而已知的條件式(1)至(18)式扣除(11)、(12)、(17)、(18)四式計有14式，依狀況可加計(19)、(20)兩式，欲解23個未知參數則尚需加入數個觀測方程式，使方程式總數至少達23式，所需的方程式可由一些已知的資料來產生，舉例如下：

(21)、 $x_{TS} = x'_{TS}$ ，式中 x'_{TS} 為實測坐標值。

(22)、 $y_{TS} = y'_{TS}$ ，式中 y'_{TS} 為實測坐標值。

(23)、 $x_{SC} = x'_{SC}$ ，式中 x'_{SC} 為實測坐標值。

(24)、 $y_{SC} = y'_{SC}$ ，式中 y'_{SC} 為實測坐標值。

(25)、 $x_{CS} = x'_{CS}$ ，式中 x'_{CS} 為實測坐標值。

(26)、 $y_{CS} = y'_{CS}$ ，式中 y'_{CS} 為實測坐標值。

(27)、 $x_{ST} = x'_{ST}$ ，式中 x'_{ST} 為實測坐標值。

(28)、 $y_{ST} = y'_{ST}$ ，式中 y'_{ST} 為實測坐標值。

(29)、 $x_{IP} = x'_{IP}$ ，式中 x'_{IP} 為實測坐標值。

(30)、 $y_{IP} = y'_{IP}$ ，式中 y'_{IP} 為實測坐標值。

(31)、 $R=R'$ ，式中 R' 為已知的曲線參數值。

(32)、切線長=(IP, TS)長度=TL，TL為已知的曲線參數值。

(33)、弧線長=(SC, CS)圓弧長=CL，式中CL為已知的曲線參數值。

除上述(21)至(33)式，只要是能利用已知的資訊並配合未知參數所形成的方程式均可利用，在此不在一一列舉。

所有的方程式均可寫成 $f(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ 的函式形式，將所列出的函式 f 以泰勒展開式線性化，並以疊代漸進的方式進行求解。線性化所需使用的偏微分公式請參考附錄，另外疊代計算前，未知參數之初始值必需先算出。

第三章 研究發現

經過前述的理論推導，解算的數學模型大致上已建立完成，為驗證此方法是否可行，本研究中同時進行相關程式的開發工作，以進行實際測試驗證。在前述說明中，兩種不同曲線道路的平差數學模型，各自有其接近制式化的框架，以此框架為基礎，解算流程是明確的，其基本的流程大致有四：

（一）輸入已知的資料並設定權值，包括樁位坐標、曲線元素及約制條件等。

（二）由輸入的資料解算未知參數的初始近似值。

（三）由輸入的資料組成條件方程式及觀測方程式，開始疊代計算。

（四）由疊代計算所得成果，整理產生最後的樁位坐標及所有的曲線參數值，最後輸出成果。

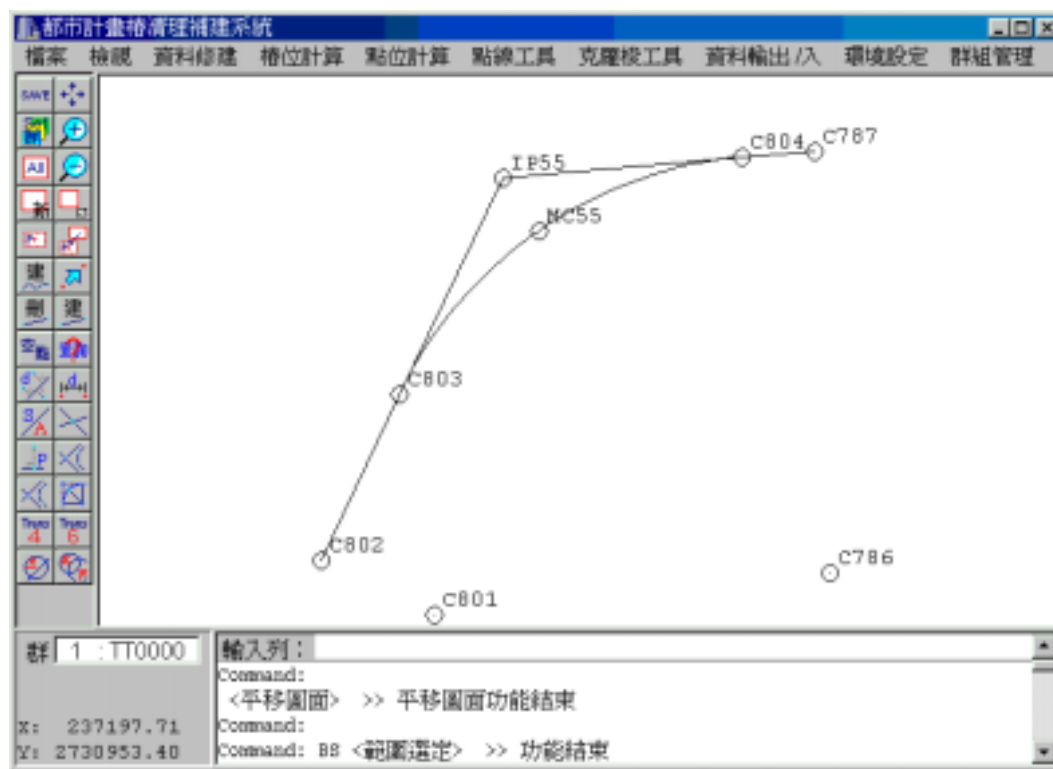
實作中發現，在流程（一）及（二）是最彈性卻也是程式設計上較複雜的部份，原因是在流程（一）中，為盡量使程式能處理面對各種不同的狀況，程式設計上應讓使用者能彈性的選擇輸入資料項，這樣的目標將造成流程（二）變的相當複雜，愈彈性的輸入代表程式的處理能力愈強，然而愈彈性的輸入將衍生下面的問題：因為輸入項可以不同，不同的輸入項可以對不同的未知參數進行求解初始值，要由各種不同組合的輸入項來對一組相同的未知參數進行初始值求解，其方法變的太多造成程式設計上的複雜，本研究因限於時間因素，故設計時先固定要求使用者必須輸入某一些項目，由這些固定的輸入項目依照一定的程序來解出所有的參數初始值，其它輸入項則依然保持彈性，未來這個問題可以利用一些設計技巧來解決，即利用某（幾）個已知的輸入資料可以解出某幾個未知參數的初始值，已解出初始值的未知參數又可當作是已知的資料可用來求解其他的參數，故將幾個基本的

未知參數求解演算公式寫在程式迴圈中，透過在迴圈中不停的計算，逐漸的增加未知數初始值被解出的個數，直到全部的未知數初始值被解算出來。

另外，在流程（三）中，組成條件方程式的部分幾乎是標準化且固定的，剩下要注意的是由輸入資料組成觀測方程式，這部分不算困難，在第二節的說明中已將大多數且常用的觀測方程式列出，對應已知的資料便可將對應的觀測方程式加入平差中，只要平差中的方程式數量足夠即可求解。

以下為實作範例，程式以 C++ 語言撰寫，並結合在內政部土地測量局所開發的「都市計畫樁清理補建系統」下。

【範例一】單曲線道路解算



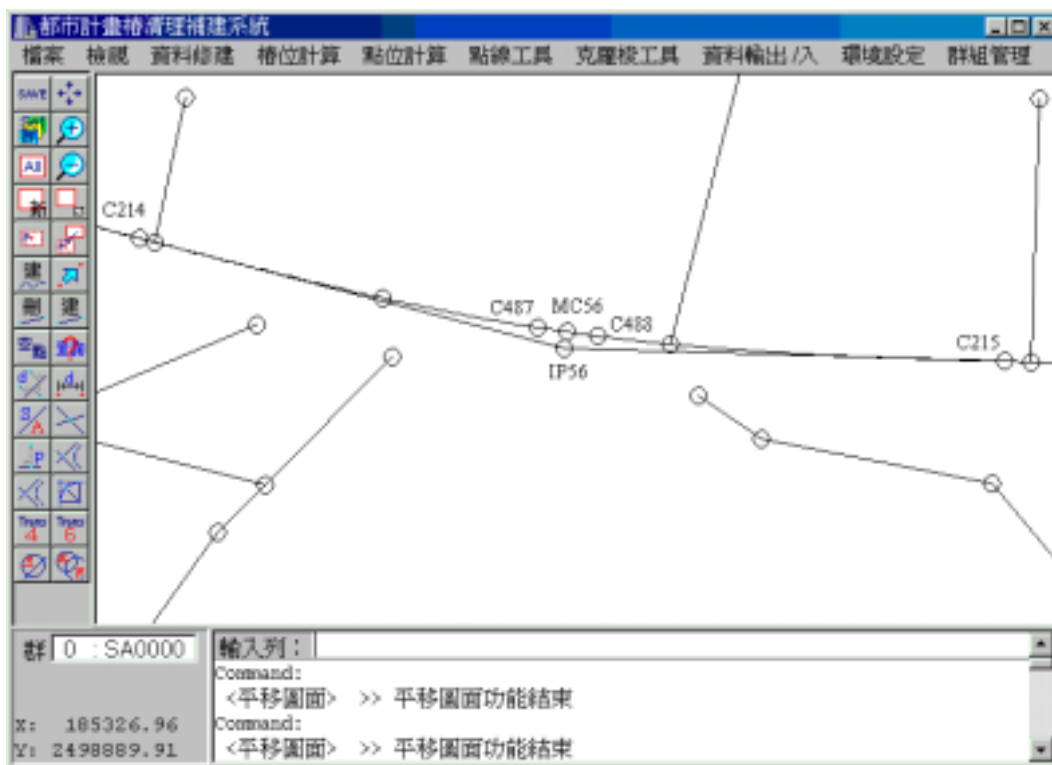
圖五 單曲線範例圖

權	已知值(輸入值)	檢算值	<< >> 較差
10	起始方向點(BEG) 1::C787	(237231.054, 2731037.341)	
0	BC 1::C804	(237213.942, 2731035.837)	(237213.946, 2731035.836)
9	IP 1::IP55	(237157.072, 2731030.834)	(237157.072, 2731030.834)
0	MC 1::MC55	(237165.717, 2731018.381)	(237165.719, 2731018.380)
0	EC 1::C803	(237132.505, 2730979.300)	(237132.506, 2730979.296)
10	終止方向點(END) 1::C802	(237113.791, 2730940.033)	
0	外偏角(IA)	59-29-18	(59-29-19)
9	曲率半徑(R)	99.917	99.9170 (99.9148)
0	切線長(TL)		57.0938 (57.0935)
0	圓曲線長(CL)		103.7406 (103.7406)
0	矢距(SL)		15.1617 (15.1616)

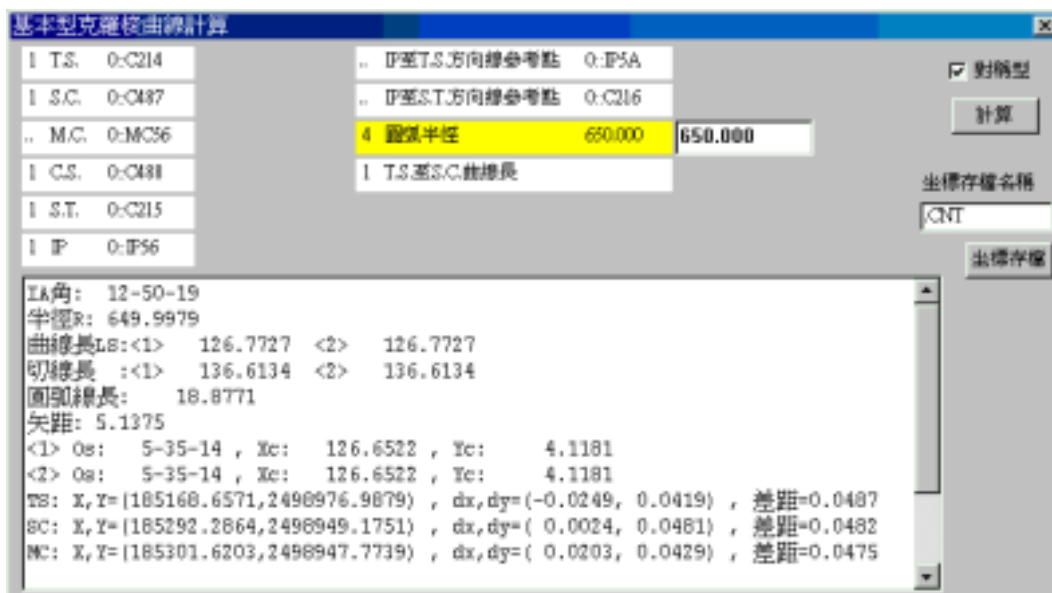
圖六 單曲線道路中心樁解算工具畫面

在圖六中，輸入了已知的 BEG 和 END，並將權值設為 10（此例中為最大的權值），表示將起始方向和終止方向加以控制（BEG、BC、IP 共線及 END、EC、IP 共線），此外，輸入 IP 和曲率半徑 R 並設定較大的權值（相對於其他輸入項），而圖中最右邊（）內的值及為最後解算的結果，本例的解算條件是實務上最常遭遇的狀況，即在起始方向和終止方向的約制下，求出一曲率半徑為 R 的圓弧道路中心樁。

【範例二】克羅梭曲線道路解算



圖七 克羅梭曲線範例圖



圖八 克羅梭曲線道路中心樁解算工具畫面

本範例為一基本對稱型克羅梭曲線，樁位 C214 至 C487 為一克羅梭曲線，C487、MC56、C488 為圓弧，C488 至 C215 為另一段克羅梭曲線，因為對稱型，故 IP56 至 C214 的距離與 IP56 至 C215 的距離相等，本例中輸入了圓曲率半徑並設定為相對較大的權值，計算後的結果顯示於圖八下方的視窗中，由於將圓曲率半徑的權值設定的較大，所以其計算後的結果在曲率半徑上有較少的差量（輸入為 650.000，計算後為 649.9979），大部份的誤差量則是配賦到其它的參數上，利用調整各輸入項的權值，可以調整計算結果來達到與實際狀況（現況）較接近的成果。

第四章 效益分析

長久以來，對於解算曲線道路中心樁的問題，並無一個良好的解算方法，而目前實務採用的解決方法存在著兩個主要的缺失，說明如下：

(一) 目前各種解算方式不外乎是先固定某些樁位坐標及曲線參數，然後由這些固定值去推算出一個未固定的坐標(或曲線參數)值，此種方式一次僅能對一個未固定的參數做局部推算，無法達到一個整體性的考量，而且嚴格來說，必須重複的對所有不同參數做推算才能取得一組較佳的推算成果，但儘管能找到一組較佳的成果，此結果乃是基於固定許多參數值進而推算另外的參數值而得到，因此當被固定的參數值含有誤差時，則所有的誤差將累積傳播到被求解的參數上，這些誤差量並不容易估計，而且這樣的結果可能會造成局部誤差較大，較合理的方式應該是要讓各個參數都吸收部分的誤差，因此若要得出更佳解，使用者還必須自行些微的調整被固定的參數值(其作用即是以人工來配賦部分誤差)，反覆的計算直到找到一個可接受的成果，此種方式(試誤法)不甚科學並且十分耗時。

(二) 在求解的過程中，各樁位坐標之間存在多個數學關係式，部分的關係式相當複雜，而愈複雜的曲線道路其包含的數學關係式也愈多，以上述試誤法解算出參數後還必須交互驗算，否則便可能存在不能滿足某些數學關係式的問題，此為經常發生的問題，因為對於一般測量人員而言，如未針對各種曲線道路進行深入的了解或特別訓練，要完整而清楚的知道曲線道的樁位間存在有哪些數學關係式是不容易的，也因此解算成果可能隱含著無法完全滿足所有必要的數學關係式的錯誤。

為克服上述的難題，本研究以整體平差的觀點出發，利用曲線道路的樁位坐標間之關係建立起平差系統(數學模型)，並透過

測量平差法解算樁位坐標，此種方式有三大主要優點：

（一）樁位坐標的解算可達到整體性的考量，各坐標參數均可配賦到一些不符合量（誤差量），可避免用傳統方法解算時，所有的不符合量集中在一個或少數個樁位坐標上。

（二）以平差系統解算時，可進一步配合實際狀況的考量，利用加權的方式來控制調整解算的成果，使其能接近使用者所期望的成果，例如：使用者希望某一樁位坐標在求解後有較小的異動量，則可將該樁位坐標參數的權值加大，則平差後該樁位的坐標值改正量將會較小，亦即可得到該樁位坐標異動較少的結果。

（三）對於各種類型的曲線道路可各自建立一標準化的平差數學模型，在標準化的基礎下，解算過程可設計成電腦程式，增加作業上的便利性及效率。

第五章 改進建議

本研究所提出以測量平差法解算曲線道路中心樁的方法，經理論的推導以及程式設計的實作，證實確實可行。經實際的資料測試下，可成功且有效率的解決曲線道路中心樁的問題。此外，透過整個研究過程，同時得到以下心得及改進建議，謹提出幾點未來可繼續努力的方向：

（一）本研究僅針對單曲線道路及克羅梭曲線道路進行探討，應用相同的概念，可進一步推導建立其他曲線道路如複曲線、反曲線、三次拋物線曲線等之平差數學模型，解決各類複雜曲線的問題。

（二）在進行疊代計算之初，各未知參數必須給予近似的初始值，其中樁位坐標參數可直接採用已知的坐標值（近似坐標）當作初始值，而其它許多被引入平差系統中的參數並無初始值，則須利用已有初始值的參數來求得，此為一必要的工作，所須求出的初始值僅需是近似值即可，故可利用簡單的圖形關係及簡化的數學式來進行，此一部分可再作深入研究，找出計算簡單、效率高且近似值品質較佳（平差系統可收斂）的方法。

（三）利用對觀測方程式加權的方式可控制調整解算的成果，本研究中，實作上是由使用者自行設定調整來求取符合使用者要求的結果，在本研究中並未進一步分析權值（相對）大小，對平差結果所造成的影響，如何依據使用者之期望更自動化的設定權值是值得進一步研究的議題。

（四）本研究中已經將單曲線道路、複曲線道路、反曲線道路及基本型克羅梭曲線道路實作成電腦程式，未來可持續改善程式之操作介面，提供使用者更多且更彈性的條件狀況設定，讓使用者更容易也更快速求解到所預期的成果。

附 錄

A · 非線性函數之線性化求解

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f' \cdot (x - x_0) + \frac{f''}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots \\ &= f(x_0) + f' \cdot (\Delta x) + \frac{f''}{2!} \cdot (\Delta x)^2 + \frac{f'''}{3!} \cdot (\Delta x)^3 + \dots \end{aligned}$$

上式為單一變數函數 f 在 x_0 的泰勒展開式，若 x_0 為函數值已知時之一個近似解，則真解與近似解之差值 Δx 為一小數值，取 f 一階近似 $f_a(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ ，此為一線性方程式可求解得 Δx ，再以疊代漸近的方式（令 $x_0 = x_0 + \Delta x$ ），可得 $\Delta x \rightarrow 0$ 且 $f_a(x) \rightarrow f(x)$ 。雙變數函數之一階近似如下：

$$f(u, v) = f(u_0, v_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_0 \cdot (u - u_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_0 \cdot (v - v_0)$$

多變數函數以此類推。

上述即是一般將非線性函數以泰勒展開式線性化後，疊代漸近求解的方式。

B · 各類型（條件／觀測）方程式及其一階偏微分方程式

（1）角度方程式：

$$\angle P_1 P_2 P_3 = \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \right)$$

$$\text{令 } A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad B = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2,$$

$$C = (x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2), \quad U = \frac{C}{\sqrt{AB}}$$

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \cos^{-1} \left(\frac{C}{\sqrt{AB}} \right) - \theta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(x_3 - x_2) - C(x_1 - x_2)/A}{\sqrt{AB}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(y_3 - y_2) - C(y_1 - y_2)/A}{\sqrt{AB}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(2x_2 - x_1 - x_3) + C(x_1 - x_2)/A + C(x_3 - x_2)/B}{\sqrt{AB}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(2y_2 - y_1 - y_3) + C(y_1 - y_2)/A + C(y_3 - y_2)/B}{\sqrt{AB}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(x_1 - x_2) - C(x_3 - x_2)/B}{\sqrt{AB}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_3} = \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(y_1 - y_2) - C(y_3 - y_2)/B}{\sqrt{AB}}$$

(2) 距離方程式：

$$L \text{ 爲已知， } L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - L = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{-(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{-(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

(3) $\overline{P_1P_2} = \overline{P_3P_2}$ 等距離方程式：

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{-(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - \frac{-(x_3 - x_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{-(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - \frac{-(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{-(x_3 - x_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_3} = \frac{-(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

(4) 弧長方程式：

P_2 為圓心， P_1 至 P_2 之距離為半徑 R ， $\angle P_1 P_2 P_3 = \theta$ ，弧長 CL 為已知，則 $CL = R\theta$ ，其中

$$R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \right)$$

$$\text{令 } A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad , \quad B = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \quad ,$$

$$C = (x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2) \quad , \quad U = \frac{C}{\sqrt{AB}}$$

方程式寫成： $f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \sqrt{A} \cdot \cos^{-1}(U) - CL = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{A}} \cdot \cos^{-1}(U) + \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(x_3 - x_2) - C(x_1 - x_2)/A}{\sqrt{B}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{(y_1 - y_2)}{\sqrt{A}} \cdot \cos^{-1}(U) + \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(y_3 - y_2) - C(y_1 - y_2)/A}{\sqrt{B}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{-(x_1 - x_2)}{\sqrt{A}} \cdot \cos^{-1}(U) + \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(2x_2 - x_1 - x_3) + C(x_1 - x_2)/A + C(x_3 - x_2)/B}{\sqrt{B}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{-(y_1 - y_2)}{\sqrt{A}} \cdot \cos^{-1}(U) + \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(2y_2 - y_1 - y_3) + C(y_1 - y_2)/A + C(y_3 - y_2)/B}{\sqrt{B}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(x_1 - x_2) - C(x_3 - x_2)/B}{\sqrt{B}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_3} = \frac{-1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{(y_1 - y_2) - C(y_3 - y_2)/B}{\sqrt{B}}$$

(5) 方向（角）方程式：

$$P_1 \text{ 至 } P_2 \text{ 之方向 } \theta \text{ 已知 } (\pi/2 - \theta = z = \text{方位角}) \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) - \theta = 0 \quad , \quad \text{令 } U = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{1+U^2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{1}{1+U^2} \cdot \frac{-1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{1+U^2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{(x_2 - x_1)^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{1}{1+U^2} \cdot \frac{1}{x_2 - x_1}$$

(6) 三點共線方程式：

通過 P_1 、 P_2 之直線方程式為：

$$\text{直線 } L : (y_2 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_2) \cdot y - (y_2 - y_1)x_1 - (x_1 - x_2)y_1 = 0$$

一點至直線 $ax+by+c=0$ 之距離公式為： $d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，因三點共線，

$$\text{故可得方程式： } f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \frac{|(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) + (x_1 - x_2)(y_3 - y_1)|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} = 0$$

$$\text{令 } A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad , \quad B = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) + (x_1 - x_2)(y_3 - y_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{|B|}{\sqrt{A}} \cdot \left(\frac{y_3 - y_2}{B} - \frac{x_1 - x_2}{A} \right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{|B|}{\sqrt{A}} \cdot \left(\frac{x_2 - x_3}{B} - \frac{y_1 - y_2}{A} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{|B|}{\sqrt{A}} \cdot \left(\frac{y_1 - y_3}{B} + \frac{x_1 - x_2}{A} \right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{|B|}{\sqrt{A}} \cdot \left(\frac{x_3 - x_1}{B} + \frac{y_1 - y_2}{A} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{|B|}{\sqrt{A}} \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{B} \right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_3} = \frac{|B|}{\sqrt{A}} \cdot \left(\frac{x_1 - x_2}{B} \right)$$

上述三點共線的推導是以長度量（距離）為量測依據，亦可以角度量為量測依據，可根據三點的排列順序所形成的角度為 0 或 π ，利用（1）角度方程式來取代。

參考文獻

- | | | |
|-----------------|----------|--------|
| 都市計畫樁測定工程作業手冊 | 台灣省政府地政處 | 八十年三月 |
| 都市計畫樁測定及管理辦法 | 內政部 | 八十八年六月 |
| 都市計畫樁清理補建系統操作手冊 | 台灣省政府地政處 | 八十八年五月 |
| 克羅梭緩和曲線應用手冊 | 科技圖書 | 八十四年九月 |
| 電腦繪圖的數學基礎 | 儒林 | 七十二年 |
| 電腦繪圖初步 | 儒林 | 七十四年 |