

GNSS 單一時刻即時動態週波未定值解算： 使用 LAMBDA 與 CAR 兩種方法

GNSS Single Epoch Real-Time Kinematic Ambiguity Resolution : Using LAMBDA and CAR Methods

張耀允¹ 儲豐宥² 楊名³ 曾耀賢⁴ 劉正倫⁵
Yao-Yun Chang Feng-Yo Chu Ming Yang Yao-Hsien Tseng Jheng-Lun Liou

摘要

載波相位觀測量在高精度的 GPS 動態定位扮演一個重要的角色。當決定了正確的整數週波值，單一時刻確實可達到公分等級的定位精度。本研究將聯合 GPS 及 Galileo 的三頻觀測量，利用 LAMBDA (Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment) 與 CAR (Cascading Ambiguity Resolution) 兩種解算週波值的方法，分析 GNSS 單一時刻二次差分週波未定值解算效益。模擬取樣間隔為 2 分鐘的 24 小時觀測量，以進行短基線單一時刻週波值的解算。利用正確的週波值與估計的 Ratio 值作為成功解算週波值的依據，分析不同觀測條件下週波值的解算成果。

研究成果顯示，當使用衛星仰角大於 30 度且載波觀測量的精度為 1 公分時，LAMBDA 法解算整數週波值完全正確的筆數可達 99% 以上，同時，通過 Ratio 值測試的筆數也有 90% 以上。而 CAR 法解算整數週波值受到觀測量精度與線性組合的影響，使得正確整數週波值的筆數銳減。因此未來 GNSS 單一時刻即時動態定位，使用 LAMBDA 法解算週波值將較 CAR 法更具測量應用上之優勢。

關鍵詞：GNSS、Galileo、Single-epoch Ambiguity Resolution、LAMBDA、CAR

¹ 國立成功大學 測量及空間資訊系 碩士

² 國立成功大學 測量及空間資訊系 博士生

³ 國立成功大學 測量及空間資訊系 教授

⁴ 內政部土地測量局 課長

⁵ 內政部土地測量局 副局長

一、前言

未來具備多頻訊號的聯合衛星系統，統稱為第二代的全球導航衛星系統 (Global Navigation Satellite Systems, GNSS)。GPS 動態定位中，存在著衛星遮蔽及快速移動等問題，影響 RTK 的效率和精度。隨著現代化 GPS 以及 Galileo 三頻系統的逐步實現，更多的衛星數目、更好的訊號品質及衛星幾何強度都有助於整數週波未定值的解算。現代化 GPS 以及 Galileo 的多頻觀測量，短基線在週波值的解算效益上有顯著的提升，整合 GPS 及 Galileo 兩系統解算單一時刻週波未定值的成功率(success-rate) 可以達到 0.99999999 的等級【Tiberius *et al.*, 2002】。新適用三頻週波值解算方法有針對 GPS 提出的 CIR (Cascade Integer Resolution)【Hatch *et al.*, 2000; Jung *et al.*, 2000】和針對 Galileo 提出的 TCAR (Three-Carrier Ambiguity Resolution)【Forsell *et al.*, 1997; Vollath *et al.*, 1999】，本研究將這兩種方法統稱為 CAR (Cascading Ambiguity Resolution)。文獻顯示單系統下 LAMBDA 法略優於這兩者【Teunissen *et al.*, 2002; Ji *et al.*, 2007】，因此本研究將進一步結合 GPS 及 Galileo 雙系統觀測量，評估 GNSS 單一時刻短基線下兩類方法的解算效益。

二、觀測量之數值模擬及線性組合

由於目前無法取得真實之三頻以及 Galileo 的觀測量，因此在驗證 GNSS 多頻週波值解算方法之前，必須先進行實驗資料之數值模擬。電離層誤差與頻率相關，同一時刻各頻率觀測量的對流層誤差、軌道誤差以及接收儀時錶誤差是相等的，而多路徑誤差以及隨機噪聲則是互相獨立的。利用這些誤差的特性，即可模擬載波與電碼觀測量及進行線性組合【楊名及江凱偉，2007】。

2.1 模擬 GNSS 觀測量

根據虛擬距離及載波相位的觀測方程式，模擬單向(one-way)距離觀測量。利用衛星與測站的已知坐標可得幾何距離，再依序加入表 1 之各種觀測量誤差，即可同時模擬 GPS 與 Galileo 單一基線的觀測量，如圖 1 所示。

表1 模擬觀測量之誤差設定

誤差種類	加入與否	預設誤差值及說明
雜訊	Yes	依據實驗所需給定
接收儀時錶	Yes	± 300 m
電離層延遲	Yes	Klobuchar Model
對流層延遲	Yes	Modified Hopfield Model
軌道誤差	Yes	GPS = ± 2 m , Galileo = ± 2 m
系統時間偏差(GGTO)	Yes	50 ns
多路徑效應	No	

吾人利用簡易的模型模擬系統誤差，包括GPS及Galileo系統間的時間差GGTO(GPS-Galileo Time offset)【Bossche *et al.*, 2004】。本研究分析短基線週波未定值解算，因此模擬觀測量組二次差分後將可忽略系統誤差的影響。

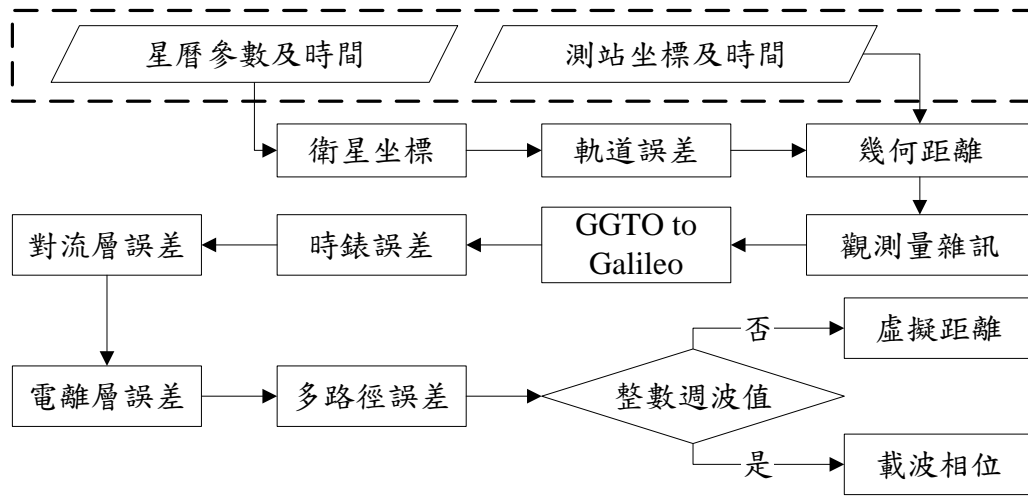


圖 1 模擬觀測量之流程

2.2 三頻觀測量線性組合

已知 GPS 與 Galileo 提供三頻民用訊號的頻率及波長，其中觀測量 L1/E1 及 L5/E5a 具有相同的載波頻率，如表 2 所示。

表 2 三頻載波觀測量之線性組合

系統	訊號	頻率 (MHz)	波長 (m)	線性 組合	整數係數			組合波 長 (m)
					k_1	k_2	k_3	
GPS	L1 (φ_1)	1575.42	0.190	EWL	0	1	-1	5.86
	L2 (φ_2)	1227.60	0.244	WL	1	-1	0	0.86
	L5 (φ_3)	1176.45	0.254	ML	1	0	-1	0.75
Galileo	E1 (φ_1)	1575.42	0.190	EWL	0	1	-1	9.77
	E5b (φ_2)	1207.14	0.248	WL	1	-1	0	0.81
	E5a (φ_3)	1176.45	0.254	ML	1	0	-1	0.75

EWL : Extra-wide lane, WL : Wide lane, ML : Medium lane

將線性組合一般式可表示如下【Zhang, 2005】：

$$\varphi_{LC} = k_1 \cdot \varphi_1 + k_2 \cdot \varphi_2 + k_3 \cdot \varphi_3 \quad (1)$$

其中 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 為三頻載波觀測量， φ_{LC} 為組合後的載波觀測量，單位為週波 (cycle)。因此組合後的週波未定值則為

$$N_{LC} = k_1 \cdot N_1 + k_2 \cdot N_2 + k_3 \cdot N_3 \quad (2)$$

其中 N_1 、 N_2 、 N_3 為三頻週波未定值，單位為週波(cycle)。為了整數週波值的求解，僅考慮整數係數的線性組合。在短基線下，為減小觀測雜訊誤差的影響，使用表 2 中最簡單的組合進行 CAR 法週波值解算過程的觀測量。

三、單一時刻週波未定值解算

本研究利用 LAMBDA 法進行 GPS 雙頻解算成果的比較後，再利用模擬的三頻觀測量以及以下小節的解算步驟進行單一時刻即時動態的成果分析。

3.1 幾何模式 LAMBDA 法

短基線雙系統二次差載波相位觀測方程式可改寫如下：

$$\Phi_{ij}^{kl} = (\rho_i^k - \rho_i^l - \rho_j^k + \rho_j^l) + \lambda \cdot N_{ij}^{kl} + \varepsilon_{ij}^{kl} \quad (3)$$

上式上標為主衛星 k 及次衛星 l ，下標為主站 i 及未知站 j

其中 ρ_i^k ， ρ_i^l ， ρ_j^k ， ρ_j^l 為衛星 k 、 l 對測站 i 、 j 之幾何距離

N_{ij}^{kl} 為二次差載波觀測量之週波值

ε_{ij}^{kl} 為二次差相位觀測量之雜訊

已知欲求解的未知數有未知站的坐標以及二次差週波未定值，根據最小二乘原理可將(3)式線性化後，改寫如下【Koch, 1999】：

$$l + v = AX \quad (4)$$

其中 v 為改正數向量

A 為係數（設計）矩陣

X 為未知數向量，包含未知站坐標及週波未定值

l 為二次差觀測向量

假設同一時刻中觀測到 n 個衛星，即可得 $n-1$ 個觀測方程式，未知數目為 $(n-1)+3$ ；以此類推，在三頻觀測下可得 $3*(n-1)$ 個觀測方程式以及 $3*(n-1)+3$ 個未知數目，因此單一時刻下還需要至少單一頻率電碼觀測量才可進行求解。

在同一時刻下，迭加各頻率之法矩陣 N 及 U 矩陣後求逆，可解得單一時刻下所有觀測量之最小二乘解 \hat{X}_F ，包括週波值之實數解，如下

$$\hat{X}_F = \left(\sum_{f=1}^F N_f \right)^{-1} \sum_{f=1}^F U_f \quad (5)$$

其中

$$N_f = A_f^T P A_f, \quad U_f = A_f^T P l_f \quad (6)$$

其中 $f = 1, 2, \dots, F$ ，在此 F 為 4，包含三頻載波及單頻電碼觀測量。

在利用最小二乘法估計實數解後，經由荷蘭 Delft University of Technology 所提供 LAMBDA 之子程式搜尋兩組候選整數解，再進行成果的統計分析。

3.2 無幾何模式 CAR 法

CAR法需要超寬巷及寬巷的觀測量，因此GPS與Galileo兩系統的觀測量必須分開進行二次差分，再分階段解算週波值之演算程序描述如下：首先選用一個精度較佳或平滑化的電碼觀測量組成二次差觀測量

$$P_{ij}^{kl} = \rho_{ij}^{kl} - \frac{I_{ij}^{kl}}{f^2} + T_{ij}^{kl} + \varepsilon_{P_{ij}^{kl}} \quad (7)$$

組成超寬巷(Extra-wide lane)相位二次差方程式

$$\begin{aligned} \Phi_{EWL_{ij}^{kl}} = & \rho_{EWL_{ij}^{kl}} - \frac{I_{EWL_{ij}^{kl}}}{f^2} + T_{EWL_{ij}^{kl}} \\ & + \lambda_{EWL} \cdot N_{EWL_{ij}^{kl}} + \varepsilon_{\Phi_{EWL_{ij}^{kl}}} \end{aligned} \quad (8)$$

由於(7)及(8)兩式之幾何距離相等，在短基線下，二次差觀測量可忽略殘餘大氣延遲誤差，因此兩式相減可得超寬巷週波值實數解

$$\tilde{N}_{EWL_{ij}^{kl}} = \frac{P_{ij}^{kl}}{\lambda_{EWL}} - \varphi_{EWL_{ij}^{kl}} \quad (9)$$

假設殘餘大氣延遲誤差及觀測量雜訊被限制在一定量值時，超寬巷實數解可取最接近的整數求得超寬巷週波值的整數解

$$N_{EWL_{ij}^{kl}} = \text{round} [\tilde{N}_{EWL_{ij}^{kl}}] \quad (10)$$

一旦超寬巷的整數週波值被求出，則可代入(8)式計算較精確的相位距離。接著，聯立超寬巷及寬巷(Wide-lane)相位二次差方程式，可計算寬巷之整數週波未定值 $N_{WL_{ij}^{kl}}$ 。同理，最後計算出 L1/E1 之整數週波未定值 $N_{l_{ij}^{kl}}$ 後，即可得到全部的週波未定值。

3.3 統計分析

經由 LAMBDA 搜尋後得最佳及次佳組整數解所估計單位權變方之比值，也代表整數值搜尋成果好壞的分辨能力，Ratio 值定義如下【Koch, 1999】：

$$\text{Ratio} = \frac{\hat{\sigma}_{\text{second best}}^2}{\hat{\sigma}_{\text{best}}^2} \quad (11)$$

其中， $\hat{\sigma}_{\text{best}}^2$ 為最佳組解所計算之後驗單位權變方。 $\hat{\sigma}_{\text{second best}}^2$ 為次佳組整數解所計算之後驗單位權變方。Ratio 值若越高代表搜尋到之最佳解正確機率越高，本研究採用 2.0 作為測試之門檻值。

由於模擬觀測量已知週波未定值，且 CAR 演算法無法得到第二組整數解，

不能進行 Ratio 值測試，因此本研究將採用另一個統計方法。當同一時刻解算之週波值完全符合模擬的整數週波值，將視為正確求解的筆數，累計 24 小時內的正確筆數後，即可計算正確的百分比為

$$\text{正確率} = \frac{\text{累計正確的筆數}}{\text{24小時總筆數}} \times 100\% \quad (12)$$

在考慮正確週波值的條件下，累計通過 Ratio 值的筆數，估計 24 小時通過的百分比為

$$\text{成功率} = \frac{\text{累計正確的週波值 \& Ratio > 2.0 的筆數}}{\text{24小時總筆數}} \times 100\% \quad (13)$$

四、實驗與成果分析

模擬不同載波精度探討 GNSS 單一時刻解算成果，包括前面定義的正確率與成功率兩項成果。前者作為 LAMBDA 與 CAR 兩種週波值解算方法比較的依據，後者則為本研究作為 GNSS 單一時刻即時動態週波值解算成果的依據。

4.1 實驗資料說明

實驗資料參考表3，包括真實與模擬的GPS雙頻資料以及模擬的GNSS三頻資料。真實GPS資料的觀測時間(GPS Time)為2006年10月17日8時至8時30分，在設定衛星最低仰角為15度時，真實資料僅有六顆衛星的觀測量，因此模擬資料也挑選2880筆資料中衛星顆數為六顆的389筆作為雙頻資料比較分析的依據。雙頻資料有相同的基線長，測站(SV405-SV406)皆位於成功大學成功校區內。同時，兩者資料有相近的筆數能較客觀進行單一時刻週波值解算的比較分析。實驗所需，模擬雙頻資料的載波觀測量的雜訊分別有6.5 mm、7 mm及8 mm，電碼觀測量的雜訊則為0.2 m共3種資料。

模擬的GNSS三頻資料，包括GPS及Galileo各三頻的觀測量，波長與頻率請參考表2。模擬三頻資料的載波觀測量的雜訊分別為3 mm、6 mm及1 cm，電碼觀測量的雜訊分別為0.3 m、0.6 m、1.2 m等共有9種不同觀測量精度的組合，這些具高斯常態分佈且符合95%信心水準內的雜訊誤差，可避免不合理的解算成果。以上9種資料具相同的模擬日期與資料長度，在相同的仰角設定下，平均衛星顆數也會一致，模擬測站位置則位於測站SV405旁之超短基線。本研究分析單一時刻週波值解算，模擬資料長度皆為24小時，其資料的時間間隔並無絕對的限制。

表 3 本研究之實驗資料

	真實GPS雙頻	模擬GPS雙頻	模擬GNSS三頻
資料筆數	357	389/2880	720
資料長度(hr)	0.5	24	24
基線長(m)	87.1	87.1	6.2

4.2 GPS 雙頻資料比較分析

模擬資料並非真實的衛星軌道參數，因此本研究就GPS雙頻週波值解算的比較成果作為模擬資料的解算參考。真實資料利用SKI-Pro軟體進行短基線之解算定位，先求得兩測站的已知坐標，再藉由觀測量以及衛星到測站的幾何距離估計電碼與載波觀測量的精度作為LAMBDA法搜尋整數週波未定值之先驗資訊，如表4所示。為了排除多路徑效應等系統誤差影響觀測雜訊的估計，選擇標準偏差作為參考精度。為了評估模擬資料相對於真實資料的精度，吾人利用前面定義的成功率作為兩種資料的參考指標。表4列出3種不同載波精度的資料，經過LAMBDA法估計的成功率。在不考慮多路徑效應的影響下，以成功率為68.6%的模擬資料精度較符合真實資料的解算成果，將以此作為後續分析GNSS三頻資料的依據。

表 4 真實與模擬 GPS 估計精度與解算成果

觀測量	真實資料	模擬資料		
	S.T.D	S.T.D		
P2 (\pm m)	0.19	0.19	0.19	0.19
L1 (\pm cm)	0.4	0.65	0.7	0.8
L2 (\pm cm)	0.65	0.65	0.7	0.8
成功率	71.7%	73.8%	68.6%	54.5%

4.3 GNSS 單一時刻週波值解算成果

表 5~7 為不同遮蔽環境(10~30 度)下，LAMBDA 法單一時刻解算週波值之正確率與成功率。表中平均自由度為三頻的二次差載波觀測量減去 3 個未知坐標的個數，也就是說平均週波未定值的數目為平均自由度加上 3。在遮蔽角為 10 度及 20 度的情況下，9 種資料不論是正確率或成功率都達到 100%；而遮蔽角 30 度的情況下，其正確率也有 99%以上，成功率至少有 90%。然而，隨著觀測量的精度變差，LAMBDA 法搜尋的空間與時間增加，使得解算效率變差。

表 8 為不同遮蔽環境(10~30 度)下，CAR 法單一時刻解算週波值之成果，根據 CAR 演算法，超寬巷、寬巷以及 N1 的週波未定值必須要正確，才能夠得到正確的三頻週波未定值，因此吾人分三階段統計其正確率，而 N1 的正確率即為整體的正確率。整體而言，CAR 法在單一時刻內無法得到完全正確的週波整數解，因為線性組合的波長造成雜訊誤差的放大，使得寬巷及 N1 的週波未定值容易解算錯誤。

兩種週波值解算方法相較之下，以 LAMBDA 法較能符合測量上的定位需求。根據 GPS 雙頻資料的比較成果，未來三頻觀測量達到預期精度後，預估 GNSS 單一時刻週波值解算成功率將有更好的成果。

表 5 LAMBDA 法解算週波值之正確率

遮蔽角(deg)		10	20	30	10	20	30
載波精度(± cm)		0.3			0.6		
電碼	0.3	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
精度	0.6	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
(± m)	1.2	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

表 6 LAMBDA 法解算週波值之成功率

遮蔽角(deg)		10	20	30	10	20	30
(平均衛星顆數)		(17.1)	(13.4)	(10.2)	(17.1)	(13.4)	(10.2)
平均自由度		44.4	33.2	23.7	44.4	33.2	23.7
載波精度(± cm)		0.3			0.6		
電碼	0.3	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
精度	0.6	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
(± m)	1.2	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

表 7 LAMBDA 法解算週波值之成果(載波精度=± 1 cm)

		正確率			成功率		
遮蔽角(deg)		10	20	30	10	20	30
(平均衛星顆數)		(17.1)	(13.4)	(10.2)	(17.1)	(13.4)	(10.2)
平均自由度		44.4	33.2	23.7	44.4	33.2	23.7
電碼	0.3	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	95.7%
精度	0.6	100.0%	100.0%	99.9%	100.0%	100.0%	94.2%
(± m)	1.2	100.0%	100.0%	99.6%	100.0%	100.0%	92.9%

表 8 CAR 法解算週波值之正確率

遮蔽角(deg)		10	20	30	10	20	30	
(平均衛星顆數)		(17.1)	(13.4)	(10.2)	(17.1)	(13.4)	(10.2)	
平均週波值數目		15.1	11.4	8.2	15.1	11.4	8.2	
載波精度(± cm)		0.3			0.6			
電碼	0.3	EWL	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	
	精度	WL	28.9%	37.9%	47.8%	0.4%	0.8%	3.5%
		N1	28.9%	37.9%	47.8%	0.3%	0.4%	2.5%
(± m)		0.6	EWL	97.4%	98.1%	98.9%	96.3%	97.1%
	1.2	WL	27.8%	37.1%	47.4%	0.4%	0.8%	3.5%
		N1	27.8%	37.1%	47.4%	0.3%	0.4%	2.5%
1.2		EWL	32.4%	40.4%	51.0%	30.7%	38.9%	48.6%
	WL	9.4%	16.7%	24.0%	0.3%	0.4%	1.9%	
	N1	9.4%	16.7%	24.0%	0.1%	0.3%	1.5%	

五、結論與建議

- (1)、受到觀測量數目(自由度)以及觀測量精度的影響，雙頻週波值解算確實無法達到 100%的成功率(全部時刻數完全解算成功)。隨著三頻觀測量的實現，短基線下運作正常的 GNSS 達到 100%的週波值解算成功率已不是問題，甚至衛星遮蔽角達到 30 度也能維持在目前 GPS 雙頻定位的成果以上。
- (2)、當載波觀測量雜訊較大時，CAR 法將無法直接找到正確的整數週波值，全時段成功的筆數也因此銳減。然而，CAR 法不受衛星幾何分佈的影響，隨著衛星遮蔽角越大，週波值未知數目越少，正確率自然增加。同時，CAR 法成果間接證實線性組合的選擇也是即時動態週波值解算的考量因素。
- (3)、LAMBDA 法存在適用性的優勢，不管是無幾何或幾何模式、多系統或單系統，還是雙頻或多頻觀測量，只要幾何強度與觀測量精度夠佳以及自由度夠多，透過 LAMBDA 解相關與搜尋都有很高的機率得到正確的週波值。
- (4)、結合 GPS 與 Galileo 雙系統，LAMBDA 法可獲得最多二次差觀測量以及衛星幾何的優勢，然而增加了搜尋空間與時間以及驗證的困難度；CAR 法的優勢主要在於解算超寬巷的週波值的效益以及無繁瑣的搜尋過程。短基線應用中，以 LAMBDA 法能夠迎合測量應用的可靠度以及精度等考量，因此較 CAR 法更具使用上之優勢。

參考文獻

- 楊名、江凱偉，2007。全球導航衛星系統(GNSS)資料聯合處理技術，內政部土地測量局委託計劃期末報告。
- Bossche, M., C. Bourga, and B. Lobert, 2004, GPS Galileo Time Offset : How it Affects Positioning Accuracy and How to Cope with It, *Proc. of ION GNSS-04*, 21-24 September, Long Beach, CA, pp. 654-659.
- Forsell, B., M. Martin-Neira, and R. Harris, 1997, Carrier phase ambiguity resolution in GNSS-2. In *Proc. ION GPS-97*, pp. 1727-1736.
- Hatch, R., J. Jung, P. Enge, and B. Pervan, 2000, Civilian GPS : The benefit of three frequencies. *GPS Solutions*, Vol. 3, No. 4, pp. 1-9.
- Ji, S., W. Chen, C. Zhao, X. Ding, and Y. Chen, 2007, Single epoch ambiguity resolution for Galileo with the CAR and LAMBDA methods. *GPS Solutions*, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China.
- Jung, J., P. Enge, and B. Pervan, 2000, Optimization of cascade integer resolution with three civil GPS frequencies. In *Proc. ION GPS-00*, Salt Lake City, UT, USA. pp. 2191-2200.
- Koch, K. R., 1999, *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*,

2nd ed., Springer-Verlag, Germany

- Teunissen, P. J. G., P. Joosten, and C. Tiberius, 2002, A Comparison of TCAR, CIR, and LAMBDA GNSS Ambiguity Resolution. ION GPS-02, Delft University of Technology, The Netherlands. pp. 2799-2808.
- Tiberius, C., T. Pany, B. Eissfeller, P. Joosten, and S. Verhagen, 2002, 0.99999999 confidence ambiguity resolution with GPS and Galileo, *GPS Solutions*, Vol. 6, pp. 96-99.
- Vollath, U., S. Birnbach, and H. Landau, 1999, Analysis of Three-Carrier Ambiguity Resolution Technique Precise Relative Positioning in GNSS-2, *Journal of The Institute of Navigation*, Vol. 46, No. 1, pp.13-23.
- Zhang, W., 2005, Triple Frequency Cascading Ambiguity Resolution for Modernized GPS and GALILEO, PhD thesis, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, CA.