

GPS 網形穩健度分析研究

A Study of Robustness Analysis of GPS Networks

李旭志¹
Hsu-Chih Lee

高書屏²
Szu-Pyng Kao

許榮欣³
Ronghin Hsu

摘要

穩健度分析是結合可靠度分析及彈性力學中應變分析理論的技術，利用尺度、形狀及局部微旋轉等獨立的變形指標來檢驗點位及網形的穩健度。本文進一步推導穩健度理論方程式，以了解多餘觀測數與穩健度的關係。文中亦提出最大移位向量法(MDVA)，以簡化及精進計算程序，並透過統計方法來檢驗不同方法所計算出的變形指標，對一測量網而言在統計上是否具有等值性。除此，為了改進網形之穩健度，本文亦提出多種方法來探討對其網形穩健度之影響。本文以台灣中西部一、二等 GPS 網來測試前述理論推導與分析結果，本研究提出之方法對提昇整個台灣 GPS 控制網之穩健度有很大助益。

關鍵詞:穩健度分析、最大移位向量法、多餘觀測數

Abstract

Robustness analysis is a natural merger of reliability analysis and geometrical strength analysis using strain techniques. This analysis provides a more complete and detailed description of a network's deformation because it takes into account three independent deformation measures: robustness in scale, shape and local rotation. In this paper, the Maximum-Displacement-Vector Approach (MDVA) is presented to simplify the computation of these deformation measures. To discern the features of one approach from the other, the equivalence test is proposed to examine a network as a whole for the statistical equalities between two sets of deformation measures generated by individual approaches. To verify the relationship between the redundancies of the observations and those of the deformations, we expanded the deformation vector equation. Several methods have been used in this study to improve the level of robustness. We tested robustness analysis technique by applying it to the

¹ 國立中興大學土木工程學系博士候選人，內政部土地測量局課長

² 國立中興大學土木工程學系副教授

³ 國立臺灣大學土木工程學系教授

second-order GPS network in the mid-western region of Taiwan. The results obtained from this study reveal that those methods significantly improve the robustness level of the Taiwan GPS network.

Keywords: Robustness analysis, Maximum displacement vector approach, Redundancy

一、前言

測量網中的觀測量不免存有未被偵測出的粗差，傳統上常以可靠度來加以分析粗差對網的影響[2]。其中內可靠度(Internal reliability)用以衡量網偵測粗差的能力，外可靠度(External reliability)則探討未被偵測出來的粗差對整體點位的最大影響。然而，一具有優良內、外可靠度的網，並不能保證其個別網點都具有可靠的估計位置。Vaniček 等[7,8]提出了穩健度(Robustness)分析理論，係針對粗差對網點位置影響進行探討，利用尺度、形狀及局部微旋轉等獨立的變形指標，來量化點位及網形的穩健度。依據該穩健度理論，如果粗差對網點位置的影響很小，則稱此網具有強穩健度；反之，則稱此網具有弱穩健度。陶本藻[1]建議，由各點位坐標移位向量中，取各列(Row)中最大值，組成新的移位向量，所求得的變形指標，可用來衡量全網的平均變形。根據 Seemkooei[5,6]所作的模擬實驗顯示，在大部分的情形下，由於測量網外圍點位之測線數少，常是弱穩健度的點位所在，在其文中並提到弱穩健度乃是由於點位上之多餘觀測數較少所致。

Hsu 等[3,4]推演出變形指標與觀測值多餘觀測數的函數關係，進而與 Baarda [2] 的可靠度理論建立連繫，並分解變形指標值為自身項(Local component)與補充項(Complementary component)。其研究顯示，穩健度較差的點位，起因於這些點位的內群體觀測量之多餘觀測數總和較少，且自身項幾乎獨占整個變形指標值。此外，一研究點 i 之弱穩健度未必由內群體觀測量造成，可能為附近一多餘觀測數較少之觀測量導致。

本研究乃將 Vaniček 等[7,8]的穩健度理論方程式做進一步之推導，文中也導入陶本藻[1]的構想，提出最大移位向量法(Maximum Displacement Vector Approach, MDVA)，以簡化計算程序。本研究亦提出調整觀測量的權、改變外圍點位之連線數目，以及改變點位數目等方法來提升網形的穩健度。

二、變形指標

觀測量中之粗差導致測量網內點位之移位，欲衡量點位變形之方法為求取移位量之梯度。假設點位 $P_i(x_i, y_i)$ 之移位量為：

$$\begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_i \\ u_i \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

P_i 之變形矩陣為[7,8]：

$$E_i = \text{grad} \left(\begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_i}{\partial x} & \frac{\partial t_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

藉由變形矩陣 E_i ，可組成三個衡量點位變形之變形指標。

A. 平均應變(Mean strain) ϑ

$$\vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2-3)$$

平均應變描述研究點處的平均伸縮或增長量，表尺度變形(Deformation in scale)。

B. 總剪應變(Total shear) γ

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\tau^2 + \nu^2} \quad (2-4)$$

(2-4)式中，純剪應變(Pure shear strain)為： $\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ，表二線間之距離變化；簡剪應變(Simple shear strain)為： $\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \right)$ ，表二線間夾角變化，而研究點之總剪應變 γ 為純剪應變與簡剪應變取幾何平均，是為形狀變形(Deformation in shape)。

C. 局部微旋轉(Local differential rotation) $\delta\omega$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y} \right) \quad (2-5)$$

(2-5)式中 ω 為研究點處 Z 軸之微小旋轉(Differential rotation)；以 $\omega_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \omega_i$ 表所有網點微小旋轉之均值(Mean)， m 表網點總數。每個網點之微小旋轉 ω_i 若扣除整體平均值，可真正求得代表各個網點之局部微旋轉 $\delta\omega_i$ 。即

$$\delta\omega_i = \omega_i - \omega_0 \quad (2-6)$$

三、變形向量與穩健度

Vaniček 等[8]建議，欲衡量測量網內點位之穩健度，可採用原始之網形各點位上之測線，抑或研究點處方圓 r 公里內之測線。

設與研究點 P_i 作聯測之點為 $P_j (j=1,2,\dots,s)$ ，則變形向量與移位向量之關係式[3,4,8]：

$$e_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_i}{\partial x} \\ \frac{\partial t_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s \\ U_s \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

上式中 $T_s = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_s]^T$ ， $U_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_s]^T$ ， Q_i 為刪除 $(K_i^T K_i)^{-1} K_i^T$ 矩陣之第一列後之矩陣，其中 $K_i = \begin{bmatrix} 1 & (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \end{bmatrix}$ ($j=1,2,\dots,s$, 含 $j=i$)。

將(3-1)式中之移位向量 $[T_s \ U_s]^T$ 擴及全網，設全網之移位向量為 δX ，而研究之測量網共有 m 個點位，便可重新組成一維度為 $4 \times 2m$ 的 S_i 矩陣，其中的元素是由 Q_i 及零組成，利用整個網形的移位向量，可改寫(3-1)式為：

$$e_i = S_i \delta X = S_i N^{-1} A^T P \delta L \quad (3-2)$$

上式中， $\delta X = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_m \ u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$ ， δL 表觀測粗差向量。

將(3-2)式中的觀測粗差向量 δL 改為第 k 個觀測量中最大未被偵測出來的粗差向量 $\nabla_k = [0 \ \dots \ \nabla_{ok} \ 0 \ \dots]^T$ ， $k=1,2,\dots,n$ ， n 為觀測量總數。 $|\nabla_{ok}| = \frac{\sigma_k \delta_0}{\sqrt{r_k}}$ 表示在顯著水準 α 及檢驗功效 β 之下觀測值未被偵測出之粗差。 δ_0 為非中心化參數， σ_k 表 L_k 的觀測標準差， r_k 表其多餘觀測數。改寫(3-2)式為：

$$e_i^k = S_i \delta X_k = S_i N^{-1} A^T P \nabla_k \quad (3-3)$$

上式中， δX_k 表由 ∇_k 所引起的移位向量。

若網的設計矩陣與權矩陣已經確定，則可得改正數協方差矩陣(Q_v)，從而各觀測量的多餘數 R 可由下式的對角元素取得：

$$R = Q_v P = I - A N^{-1} A^T P \quad (3-4)$$

在等號的左右兩邊各前乘 A^T ，重新整理(3-4)式，可得：

$$N^{-1} A^T P = (A^T A)^{-1} A^T U = A^+ U \quad (U = I - R) \quad (3-5)$$

上式中 $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ 表 A 矩陣之偽逆矩陣(Pseudo inverse matrix)

如此，(3-3)式可表為：

$$e_i^k = S_i(A^+U)\nabla_k = S_iM\nabla_k \quad (M = A^+U) \quad (3-6)$$

經由(3-4)、(3-5)及(3-6)式可以進一步探討變形向量與多餘觀測數的關係。

四、穩健度指標計算法

由(3-3)式知,對每個點位而言，每個觀測量都可產生一個 e_i^k ，因此共有 n 個變形矩陣；而在穩健度分析裏每一矩陣 E_i 可以產生 3 個變形指標，所以每一點位上可算得 $3n$ 個變形指標，即 $\vartheta, \gamma, \delta\omega$ 各有 n 個。

依據 Vaníček 等[8]之建議，變形指標的選取應取其絕對值最大者作為該研究點之穩健度，即以 $|\vartheta_{\max}|, |\gamma_{\max}|, |\delta\omega_{\max}|$ 來作為表示點位穩健度之指標，此稱為 Vaníček 計算法。透過穩健度指標可以評估點位參數，估計受粗差影響的程度，當穩健度指標值愈小，表示點位愈穩健，愈不容易受粗差影響，稱此測量網具有強穩健度；反之，表示點位愈不穩健，愈容易受粗差影響而產生變形，故稱該測量網具有弱穩健度。惟依此方法計算時，每一點位之變形向量 e_i^k 皆須重複執行 n 次的迴圈(Do-Loop)來求解，計算效率降低很多，而且各指標的最大絕對值並不一定來自同一個變形矩陣，不便作更進一步的分析研究。

有別於 Vaníček 計算法，為簡化及精進計算程序，本研究參考陶本藻[1]的構想及前述推導的理論，提出最大移位向量法。

將(3-3)式中， $\delta X_k = N^{-1}A^T P \nabla_k$ 表示為

$$\delta X_k = \begin{bmatrix} \delta x_{1k} \\ \delta x_{2k} \\ \vdots \\ \delta x_{uk} \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4-1)$$

(4-1)式中，第 i 列 ($i = 1, 2, \dots, u$) 表示第 i 個參數(坐標分量 x_i)受粗差影響所產生的偏離量。最大移位向量法即是由每一觀測量 k 所形成之點位坐標移位向量 δX_k ($k = 1, 2, \dots, n$)，來組成 $2m \times n$ 之矩陣 B ，並取 B 矩陣之各列中最大值，構成新的移位向量

$$\delta X_{\max} = [\delta x_{1\max} \quad \delta x_{2\max} \quad \dots \quad \delta x_{u\max}]^T \quad u = 2m \quad (4-2)$$

即 δX_{\max} 之元素為各網點上最大坐標移位向量所組成。經此，算得變形向量

$$e_{i\max} = S_i \delta X_{\max} \quad (4-3)$$

由(4-3)式計算得的穩健度指標表示為 $|\vartheta|_{\max}, |\gamma|_{\max}, |\delta\omega|_{\max}$ ，如此，對任一點位

而言，其變形向量 $e_{i_{\max}}$ 皆為唯一，所有的穩健度指標均來自同一向量 δX_{\max} ，可簡化計算程序，提升運算速率。

經過 Vaniček 計算法與最大移位向量法求算，每個網點都會有兩組不同的變形指標值，透過統計的等值性檢定，來檢驗這兩種方法所計算出的變形指標在統計上是否具有等值性。

令 $S(|j_{\max}|)$ 表示由 Vaniček 計算法求得的變形指標 $|j_{\max}|$ 之群組 ($|j_{\max}| = |g_{\max}|$ 或 $|\gamma_{\max}|$ 或 $|\delta\omega_{\max}|$)，而 $S(|j_{\max}|)$ 表示由最大移位向量法求得的變形指標 $|j_{\max}|$ 之群組 ($|j_{\max}| = |g_{\max}|$ 或 $|\gamma_{\max}|$ 或 $|\delta\omega_{\max}|$)。為了等值性檢定，假設兩個群組的指標值具有同一平均值及變異數之常態分佈。

令 $\hat{\sigma}_1^2$ 與 $\hat{\sigma}_2^2$ 表示兩群組中某變形指標對(例如 $|g_{\max}|$ 與 $|g_{\max}|$)之樣本變異數， $\hat{\sigma}_1^2$ 為兩變異數中較大者。為檢定二變異數是否具有相等性，可以 F 統計量來實施。若在選定顯著水準 α 下，樣本統計量：

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} > F_{\alpha/2, m-1, m-1} \quad (4-4)$$

則假說 $H_0 : \hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2$ 被拒絕。

若 H_0 假設被接受，則繼續以 t 統計量來做平均值相等性檢定。令 $|\bar{j}_{\max}|$ 與 $|\tilde{j}_{\max}|$ 分別表示兩群組 $S(|j_{\max}|)$ 與 $S(|j_{\max}|)$ 中變形指標對的平均值，若在選定顯著水準 α 下，樣本統計量：

$$t = \left| \frac{\Delta}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}} \sqrt{m-1} \right| < t_{\alpha/2, 2m-2} \quad (\Delta = |\bar{j}_{\max}| - |\tilde{j}_{\max}|) \quad (4-5)$$

則假說 $H_0 : |\bar{j}_{\max}| = |\tilde{j}_{\max}|$ 被接受。

五、實驗成果及分析

本研究以台灣中西部(中、彰地區)的一、二等 GPS 點建構平面大地網(採用研究點處方圓 10 公里內之測線組成之基線向量網)為研究例，本測試網以 5 個一等點(M043、M044、M045、M049、M085)當已知點，60 個二等點當研究點(如圖 1)。採用高斯-馬可夫平差模式(Gauss-Markov Model)以坐標變分法列出邊觀測方程式，並選定顯著水準 α 為 0.05 及檢驗功效 β 為 0.80 下之非中心化參數 $\delta_0 (=2.80)$ 值。

依據 Vaniček 計算法，選取其變形指標絕對值最大者作為該研究點之穩健度，即以 $|g_{\max}|, |\gamma_{\max}|, |\delta\omega_{\max}|$ 來作為表示點位穩健度之指標；而由最大移位向量法求得之穩健度指標表示為 $|g_{\max}|, |\gamma_{\max}|, |\delta\omega_{\max}|$ 。本實驗例網形依該二種計算法求得

之各點位之穩健度指標值如表 1 所示，計算過程中，保留指標值的正負號，用以代表點位變形方向。

為了更清楚解釋整個網形各種穩健度指標之趨向，將穩健度分析結果與實驗例網形套合繪出其等值圖，如圖 2~圖 7 所示。等值圖之各穩健度指標取其絕對值，以比較其變形量之大小。由圖 2~圖 7，可以看出較弱的穩健度發生在整個網的南區。兩種計算方法所求出之穩健度指標值大約相等。整個網形穩健度強弱分佈趨勢，亦呈一致性。

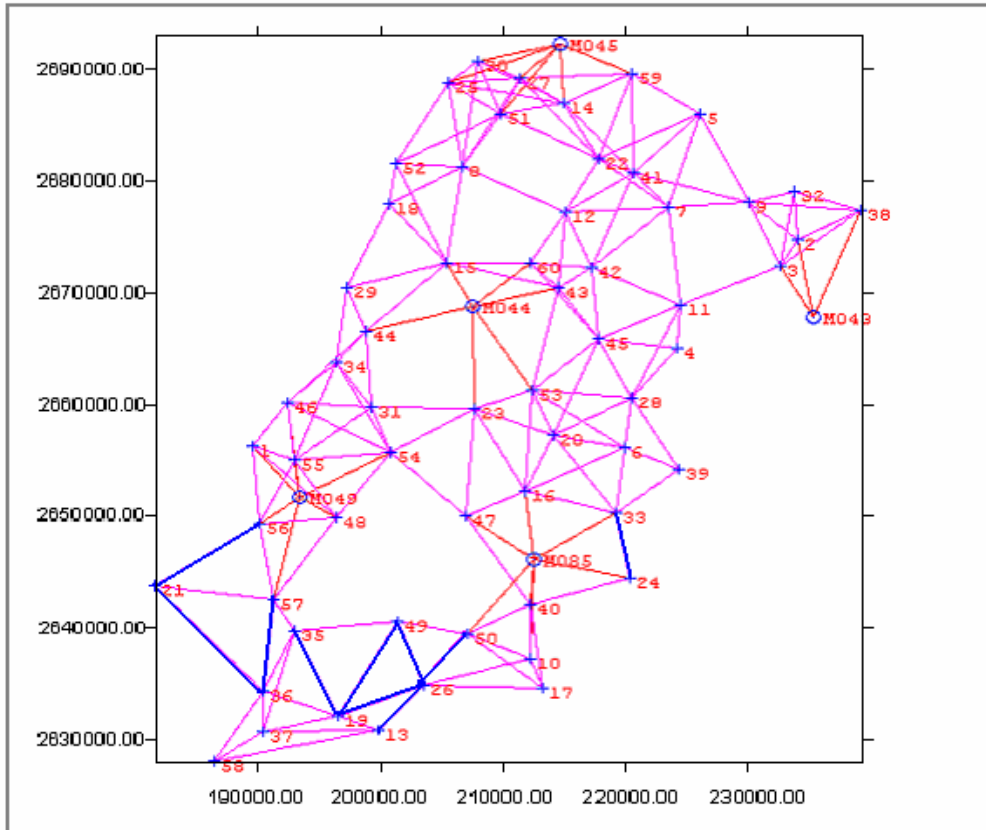


圖 1 台灣中西部一、二等 GPS 網

由 (4-4) 及 (4-5) 式知，選定顯著水準 α 為 0.05 時， $F_{\alpha/2, m-1, m-1} = F_{0.025, 59, 59} = 1.6741$ ； $t_{\alpha/2, 2m-2} = t_{0.025, 118} = 1.9803$ ；而當選定顯著水準 α 為 0.025 時， $F_{\alpha/2, m-1, m-1} = F_{0.0125, 59, 59} = 1.8045$ ； $t_{\alpha/2, 2m-2} = t_{0.0125, 118} = 2.2704$ 。

對 Vaníček 計算法與最大移位向量法所求算之每個網點的兩組不同的穩健度指標值，透過上述統計方法的等值性檢定分析值，如表 2 所示。

由表 2 知，只有局部微旋轉 $\delta\omega$ 通過 F-test 及 t-test，由此分析知：除了局部微旋轉外，Vaníček 計算法與最大移位向量法所計算出之穩健度指標，在統計上並不具有等值性。

表 1 台灣中西部一、二等 GPS 網點位穩健度指標表

(單位:ppm)

點號	平均應變		總剪應變		局部扭轉		點號	平均應變		總剪應變		局部扭轉	
	g_{\max}	$ g _{\max}$	γ_{\max}	$ \gamma _{\max}$	$\delta\omega_{\max}$	$ \delta\omega _{\max}$		g_{\max}	$ g _{\max}$	γ_{\max}	$ \gamma _{\max}$	$\delta\omega_{\max}$	$ \delta\omega _{\max}$
1	1.225	3.751	0.852	0.955	2.608	2.315	31	0.537	1.234	0.446	1.003	1.522	1.160
2	0.717	0.973	1.244	1.472	3.935	1.275	32	0.825	0.133	0.798	1.176	5.553	1.880
3	0.662	0.680	0.392	1.465	2.200	1.302	33	2.164	4.084	1.239	0.841	-0.829	0.720
4	2.772	5.054	1.870	2.831	-1.556	-0.514	34	0.526	0.931	0.579	0.808	2.132	2.464
5	0.576	1.515	0.486	0.781	-0.674	0.737	35	1.564	-1.319	2.553	5.327	-3.939	3.764
6	0.943	-0.889	0.655	1.137	2.265	2.161	36	1.175	4.256	1.575	0.806	-3.208	-3.434
7	0.613	2.304	0.392	0.085	-0.783	1.209	37	1.648	-0.020	1.852	1.918	-5.162	-1.982
8	0.652	0.250	0.373	0.655	-0.363	0.090	38	0.717	0.973	1.244	1.472	3.935	1.275
9	0.526	0.726	0.487	0.639	2.265	1.285	39	3.994	0.052	3.032	2.339	5.539	4.996
10	1.062	0.529	1.782	0.889	-8.169	-8.372	40	1.083	1.383	1.294	1.701	-3.674	-5.650
11	0.679	1.617	0.468	0.069	0.902	1.328	41	0.399	1.300	0.323	0.715	1.002	1.677
12	0.758	0.921	0.467	0.717	0.930	1.570	42	0.647	0.975	0.567	0.436	-0.515	-0.355
13	12.000	16.950	6.423	8.389	-9.928	-0.356	43	0.354	0.189	0.450	0.538	0.952	0.516
14	0.434	0.830	0.362	0.519	1.149	0.287	44	1.703	2.225	1.322	1.095	2.004	1.418
15	0.564	1.968	0.755	0.851	-0.436	0.589	45	1.020	1.118	0.593	0.800	-0.781	-0.639
16	0.782	0.862	0.497	1.126	1.114	1.648	46	0.645	1.304	0.452	0.352	1.801	2.860
17	1.915	-0.100	2.303	0.561	-9.266	-8.962	47	0.829	0.976	0.552	0.685	1.325	-0.682
18	1.707	2.874	1.365	1.497	1.642	0.813	48	0.712	2.257	0.677	0.801	2.284	3.725
19	2.234	1.766	2.661	4.767	4.805	4.107	49	2.376	2.542	3.167	3.496	4.321	3.983
20	0.394	-0.743	0.295	0.435	1.830	2.308	50	1.287	1.084	1.910	0.948	-8.527	-8.128
21	2.084	5.562	1.807	3.865	4.260	-1.731	51	0.342	-0.055	0.299	0.298	-0.534	-0.363
22	0.325	0.745	0.304	1.016	1.162	0.993	52	1.200	1.182	0.771	1.285	-0.730	0.054
23	0.570	0.767	0.385	0.363	-0.272	0.276	53	0.352	-0.046	0.304	0.041	1.336	1.471
24	4.720	8.630	3.038	2.553	-5.753	-4.751	54	0.427	0.933	0.312	0.580	-0.385	0.315
25	0.469	1.068	0.457	0.691	-0.669	-1.193	55	0.474	2.060	0.339	0.323	1.444	2.374
26	3.298	8.090	3.160	4.515	3.878	-2.136	56	1.310	2.816	1.502	2.567	-3.092	0.112
27	0.240	0.513	0.265	0.435	-0.517	-0.067	57	1.262	4.621	1.743	2.592	3.401	-1.749
28	0.860	-0.336	0.742	1.586	2.267	1.539	58	4.339	-0.459	2.739	6.228	-7.940	-11.850
29	1.995	4.239	1.659	1.943	1.929	2.368	59	0.543	1.077	0.477	1.035	1.299	1.136
30	0.483	1.159	0.448	0.686	-0.921	-1.357	60	0.445	-0.282	0.422	0.246	-0.368	0.168

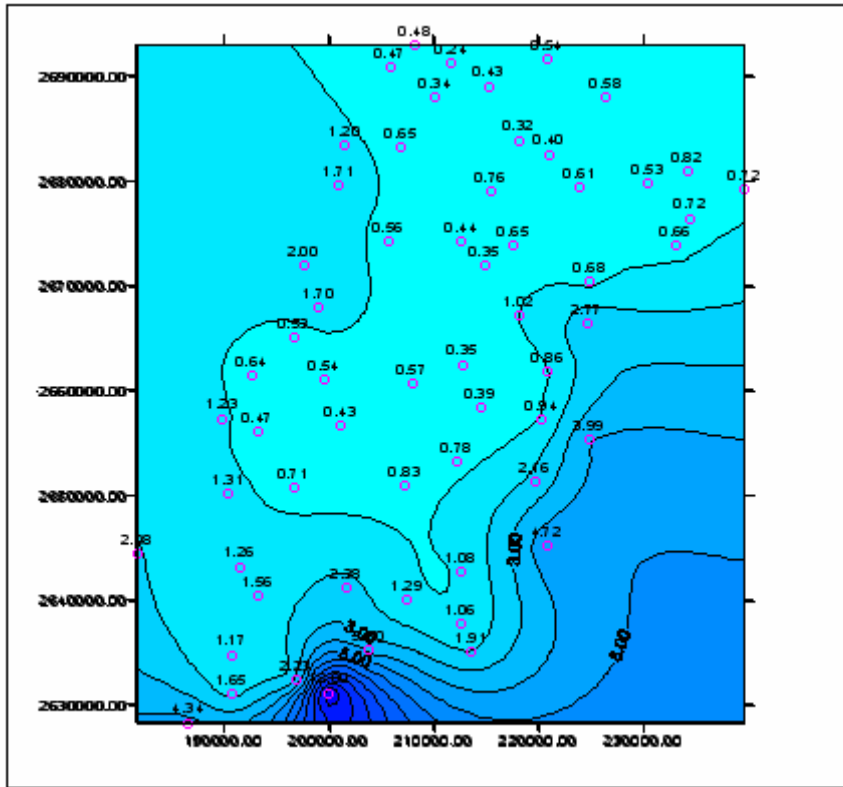


圖 2 台灣中西部一、二等 GPS 網平均應變等值圖(Vaníček 法)

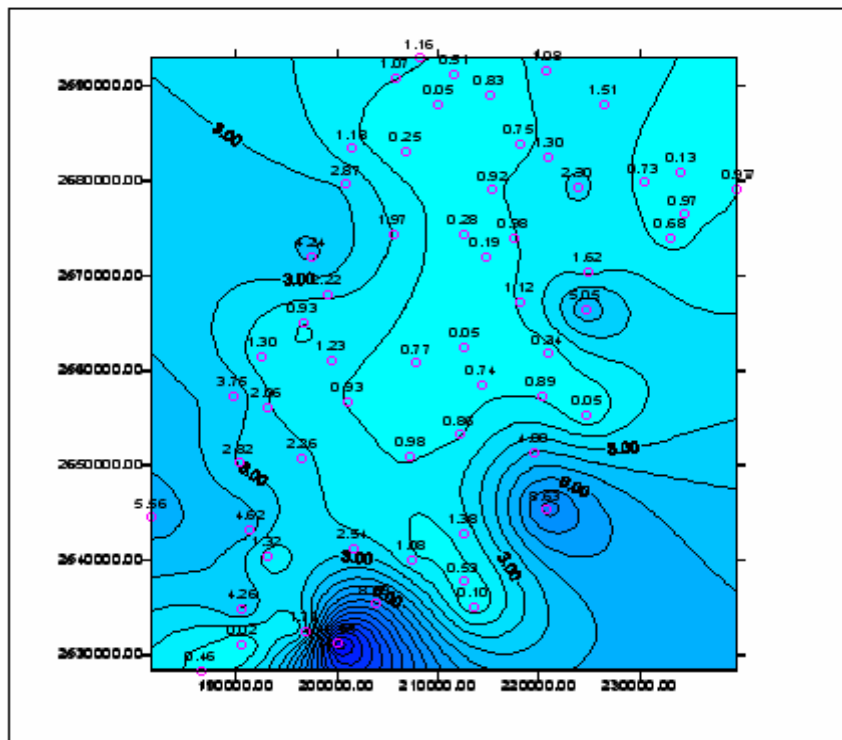


圖 3 台灣中西部一、二等 GPS 網平均應變等值圖(MDVA)

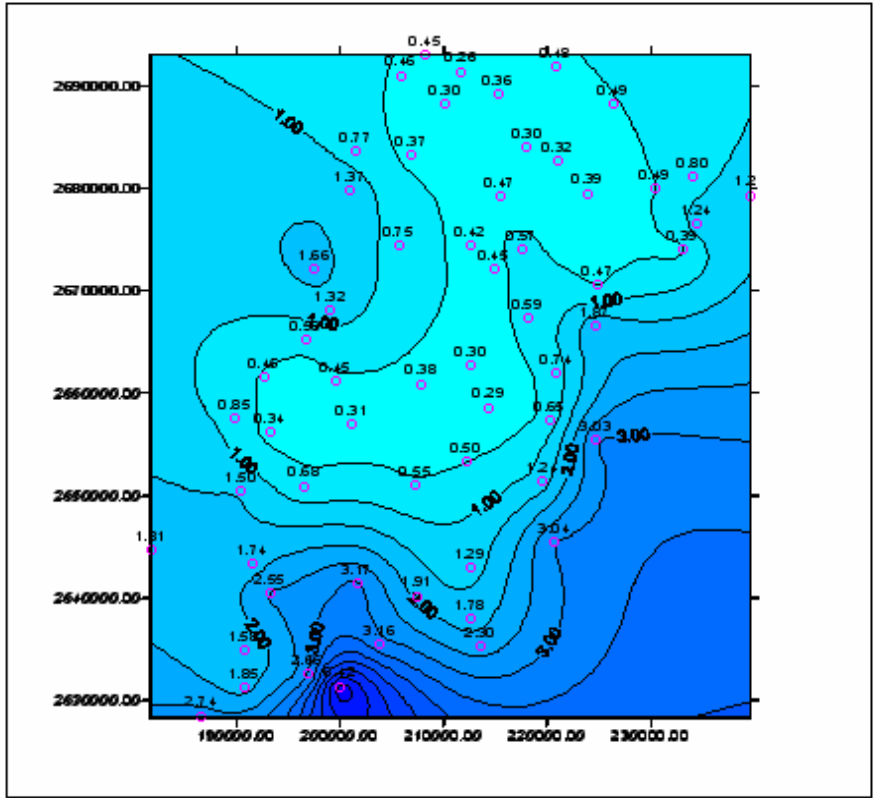


圖 4 台灣中西部一、二等 GPS 網總剪應變等值圖(Vaniček 法)

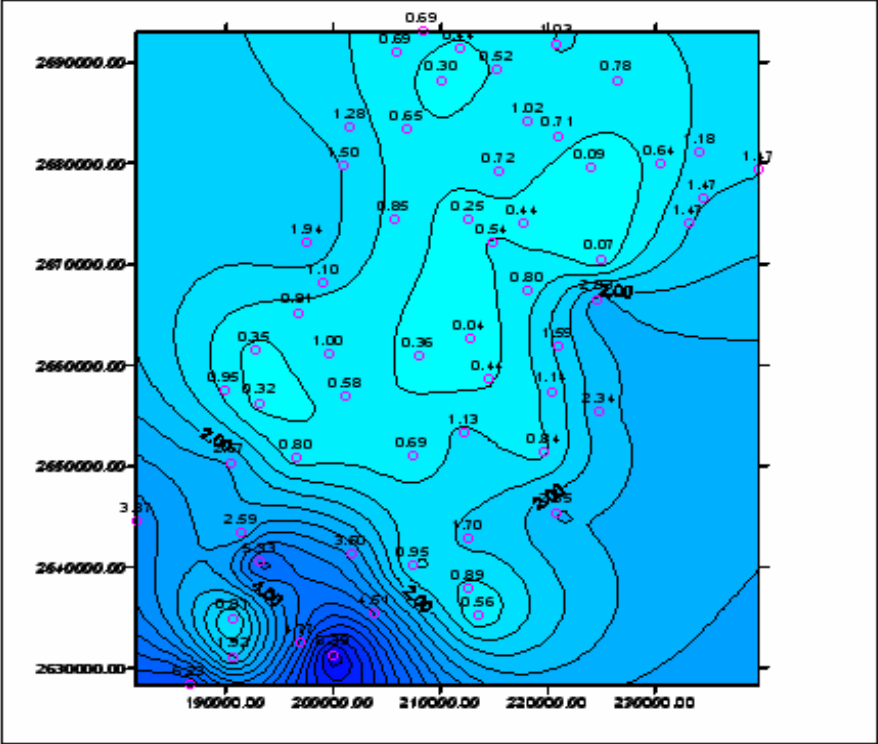


圖 5 台灣中西部一、二等 GPS 網總剪應變等值圖(MDVA)

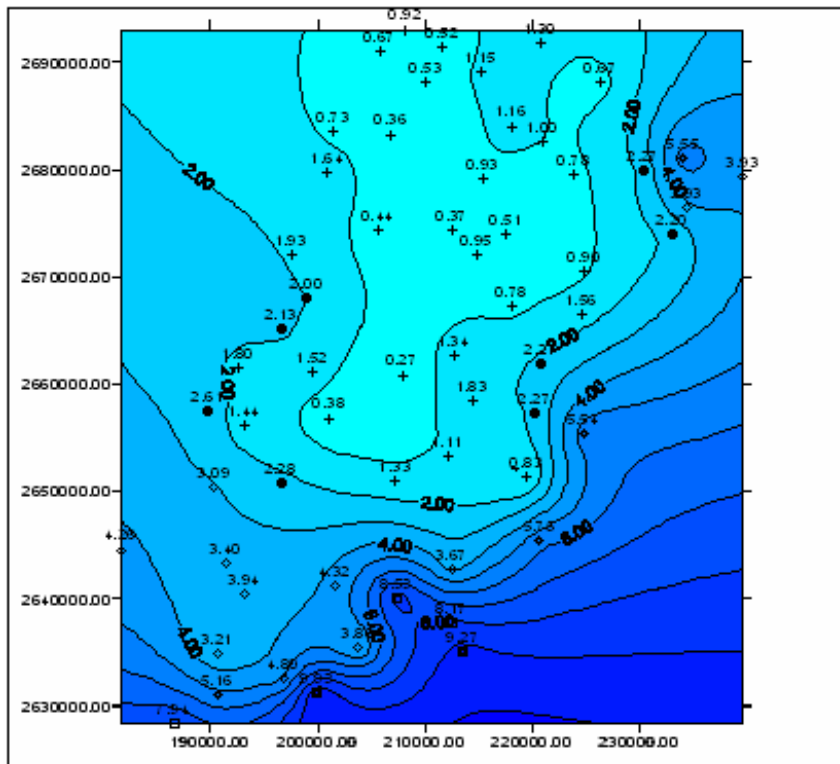


圖 6 台灣中西部一、二等 GPS 網局部扭轉等值圖(Vaniček 法)

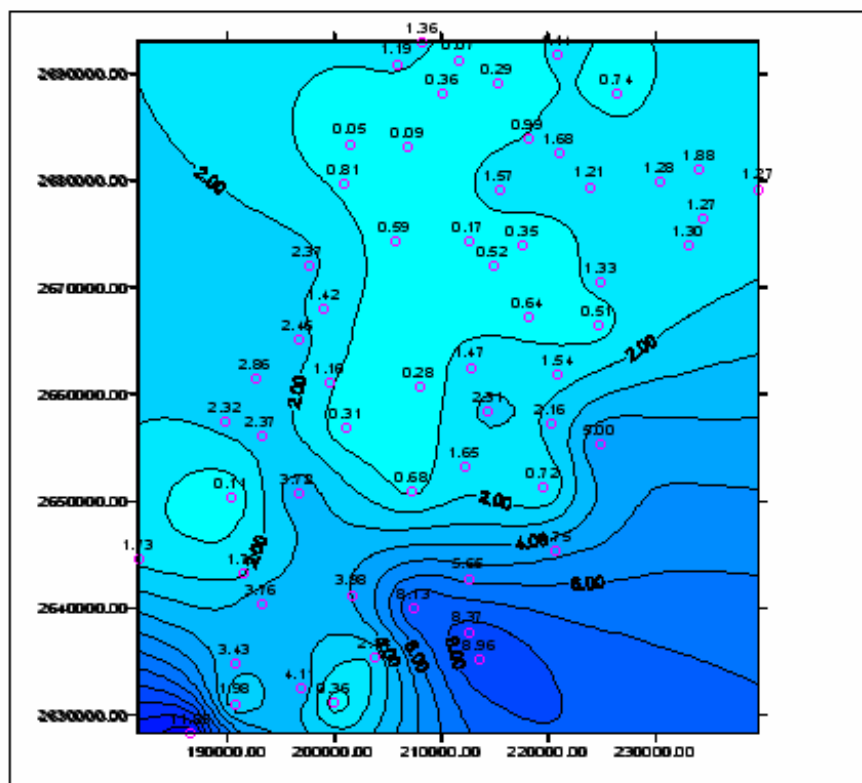


圖 7 台灣中西部一、二等 GPS 網局部扭轉等值圖(MDVA)

表 2 等值性檢定分析值

	$ \mathcal{G}_{\max} $	$ \mathcal{G}'_{\max} $	$ \gamma_{\max} $	$ \gamma'_{\max} $	$ \delta\omega_{\max} $	$ \delta\omega'_{\max} $
Mean	1.35E-06	1.83E-06	1.17E-06	1.50E-06	1.00E-11	-4.87E-11
Variance	2.94E-12	7.69E-12	1.21E-12	2.55E-12	1.28E-11	1.02E-11
F	2.618		2.109		1.249	
t	1.125		1.321		0.000	

兩種方法計算值不等值，其原因為穩健度指標來源不同，由 Vaníček 計算法計算得之同一點位的各個穩健度指標 $(|\mathcal{G}_{\max}|, |\gamma_{\max}|, |\delta\omega_{\max}|)$ ，並不一定來自同一個觀測量，惟某單一穩健度指標必僅來自單一觀測量。而由最大移位向量法計算所得的穩健度指標 $(|\mathcal{G}'_{\max}|, |\gamma'_{\max}|, |\delta\omega'_{\max}|)$ ，對任一點位而言，其變形向量 $e_{i_{\max}}$ 皆為唯一的，所有的穩健度指標均來自同一最大移位向量 δX_{\max} ；而其所獲之某一穩健度指標，其觀測量是多元的，即可能來自二個以上的觀測量。

實驗例中由 Vaníček 法計算得之較大平均應變 $(|\mathcal{G}_{\max}|)$ 的點位發生在點號：13,24,58,39,26,4,49,19,33 及 21，總剪應變 $(|\gamma_{\max}|)$ 發生在點號：13,49,26,24,39,58,19,35,17 及 50，而這些點位有位於網形外圍或多餘觀測數較少之 10 個觀測量(如表 3 所示，其連線分別為 19-49, 26-49, 24-33, 13-26, 26-50, 19-35, 21-56, 19-26, 21-36, 36-57，如圖 1 深色線條所示)附近或其點位連線數較少等現象。

表 3 多餘觀測數最少前 10 位觀測量表

觀測量編號	連線點位	多餘觀測數	邊際粗差
94	19—49	0.0336	0.122
120	26—49	0.0453	0.105
112	24—33	0.0579	0.093
61	13—26	0.0663	0.087
121	26—50	0.0732	0.083
91	19—35	0.0791	0.080
101	21—56	0.0801	0.079
90	19—26	0.0829	0.078
100	21—36	0.0842	0.077
150	36—57	0.0945	0.073

再者，分析觀測量對兩種算法之影響性，整理如表 4 所示，由表 4 知，由最大移位向量法求得之最大移位向量 δX_{\max} 受多餘觀測數所主導，而整個網較小的多餘觀測數的觀測量所產生的最大移位量值較大。任一點位之最大移位向量分量 δx_{\max} 和 δy_{\max} 主要是來自內群體觀測量(即與該點位連線之基線)。而 Vaníček 計算法，其較少多餘觀測數的觀測量主導較大的變形量。

由表 5 得知，穩健度指標值與多餘觀測數呈負中度相關，顯示穩健度指標值非全然由多餘觀測數來決定。

表 4 觀測量影響性百分比表

	$ g_{\max} $	$ \gamma_{\max} $	$ \delta\omega_{\max} $	δx_{\max}	δy_{\max}
A	55%	62%	12%	70%	85%
B	20%	27%	25%	20%	18%

A: 來自內群體觀測量

B: 來自最少多餘觀測數的前 10 個觀測量

表 5 變形指標值與多餘觀測數相關係數表

變形指標	$ g_{\max} $	$ \gamma_{\max} $	$ \delta\omega_{\max} $
相關係數	-0.5238	-0.6781	-0.7305

由多餘觀測數矩陣 R 的關係式，即前述(3-4)式($R = Q_v P = I - AN^{-1}A^T P$)，可知多餘觀測數矩陣 R ，係由協因數矩陣 Q_v 與權矩陣 P 決定，因此可藉由調整觀測量的權矩陣，來改變觀測量的多餘觀測數矩陣，以達調整網形穩健度之目的。除此之外，改變點位之連線數目以及改變已知點位或研究點位置及數目，都會對網形結構產生變化，進而影響網形點位之穩健度。

本實驗例的網形計有 193 條基線，首先對表 3 所列多餘觀測數較少的 10 個之基線(觀測量)，調整其權值 0.01、0.0001、100 及 10000 倍，檢視點位穩健度之變化。對原較大平均應變及總剪應變共同點，如點號 4,13,19,24,26,39 及 58 等 7 個點位的影響，如表 6 所示。吾人發現調降觀測量的權，對點位的穩健度有較顯著影響(如粗體所示)，由於一、二等 GPS 點本身點位精度非常高，調升觀測量的權對點位的穩健度並無顯著影響。

表 6 調權對點位穩健度影響表

穩健度 指標	$ g_{\max} $					$ \gamma_{\max} $				
	1	100	10000	0.01	0.0001	1	100	10000	0.01	0.0001
調權 點號										
4	2.77E-06	2.77E-06	2.75E-06	2.77E-06	2.77E-06	1.87E-06	1.87E-06	1.87E-06	1.87E-06	1.87E-06
13	1.20E-05	1.22E-05	1.22E-05	-2.24E-03	-2.23E-04	6.42E-06	6.54E-06	6.54E-06	1.30E-03	1.29E-04
19	2.23E-06	2.20E-06	2.20E-06	5.09E-04	5.11E-05	2.66E-06	2.51E-06	2.51E-06	5.64E-04	5.62E-05
24	4.72E-06	4.81E-06	4.81E-06	1.50E-03	1.49E-04	3.04E-06	3.10E-06	3.10E-06	9.51E-04	9.50E-05
26	3.30E-06	2.94E-06	2.94E-06	7.69E-04	7.74E-05	3.16E-06	2.87E-06	2.87E-06	6.07E-04	6.03E-05
39	3.99E-06	3.99E-06	3.97E-06	4.00E-06	4.00E-06	3.03E-06	3.03E-06	3.03E-06	3.03E-06	3.03E-06
58	4.34E-06	4.30E-06	4.30E-06	7.00E-06	6.99E-06	2.74E-06	2.71E-06	2.71E-06	5.88E-06	5.87E-06

在網形外圍增加 1-21, 21-58, 13-17, 17-24, 24-39, 39-4, 4-3 等之連線，檢視網形外圍點位穩健度之變化，對外圍原穩健度較弱之點位，如點號 4,13,17, 21,24,39 及 58 等 7 個點位的影響，如表 7 所示。吾人發現在網形外圍增加連線，確實對外圍點位穩健度提升有助益，僅由 Vaníček 計算法計算之總剪應變穩健度在少數點位例外(如粗體所示)。

表 7 增加外圍基線對點位穩健度影響表

穩健度 指標 增基線否 點號	$ g_{\max} $		$ g _{\max}$		$ \gamma_{\max} $		$ \gamma _{\max}$	
		是		是		是		是
4	2.77E-06	5.58E-07	1.87E-06	4.27E-07	5.05E-06	6.19E-07	2.83E-06	3.65E-07
13	1.20E-05	5.15E-06	6.42E-06	2.90E-06	1.70E-05	5.46E-07	8.39E-06	5.05E-07
17	1.92E-06	9.01E-07	2.30E-06	9.32E-07	-9.96E-08	2.04E-06	5.61E-07	4.50E-07
21	2.08E-06	1.09E-06	1.81E-06	8.83E-07	5.56E-06	4.49E-07	3.87E-06	4.07E-07
24	4.72E-06	9.40E-07	3.04E-06	7.31E-07	8.63E-06	2.19E-06	2.55E-06	2.73E-07
39	3.99E-06	1.67E-06	3.03E-06	1.05E-06	5.17E-08	1.24E-06	2.34E-06	1.39E-06
58	4.34E-06	1.23E-06	2.74E-06	1.18E-06	-4.59E-07	2.58E-07	6.23E-06	9.59E-07

在點號 47,48,49 內側增設一點號 61，並與週圍點位(點號：35,40,47,48,49, 50, 54 及 57)連線，如圖 8 所示。檢視其週圍點位穩健度之變化，如表 8 所示，發現對 35,49 及 50 點號在平均應變及總剪應變之穩健度均有提升作用。

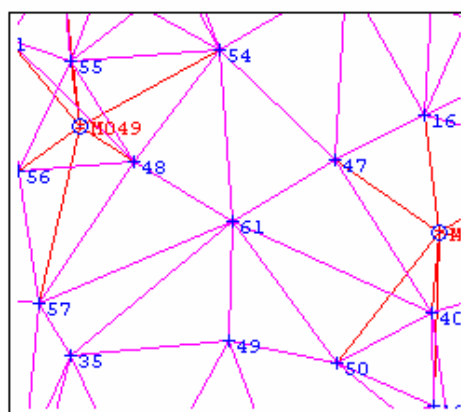


圖 8 增加點位(點號：61)及其連線示意圖

表 8 增加點位對穩健度影響表

穩健度 指標 增點位否 點號	$ g_{\max} $		$ g _{\max}$		$ \gamma_{\max} $		$ \gamma _{\max}$	
		是		是		是		是
35	1.56E-06	9.75E-07	-1.32E-06	1.06E-06	2.55E-06	1.11E-06	5.33E-06	3.33E-07
49	2.38E-06	1.08E-06	3.17E-06	8.75E-07	2.54E-06	2.45E-06	3.50E-06	4.67E-07
50	1.29E-06	6.13E-07	1.91E-06	5.60E-07	1.08E-06	1.03E-06	9.48E-07	5.11E-07

六、應用價值

台灣地區的 GPS 追蹤站以及一等、二等、三等衛星控制點，已於 1993 至 2001 年由內政部採用高精度的 GPS 相對定位方法辦理完竣，經本研究以台灣中西部(中、彰地區)的一、二等 GPS 控制網分析結果發現，台灣地區的整個控制點網形穩健度確有局部較弱之情形，本研究結合理論與量化所提出的方法，對如何增強與補建控制點網形可提供有效助益。建議於網形規劃時，先以本研究方法來發現網形不佳的區域，然後於該區補建控制點或做其他(如調權、改變外圍點連線數目等)處理。

又由於網際網路及無線數據通訊傳輸技術蓬勃發展，GPS 即時動態定位 (RTK) 儼然已成為國際測繪及定位技術之主流，特別是結合 GPS 衛星定位基準網及虛擬參考站 (Virtual Reference Station, VRS)，更是現今世界各先進國家積極建置之即時性動態定位系統。內政部土地測量局於 2005 年起規劃建置全國性 e-GPS 衛星定位基準站即時動態定位系統，以提升各級基本控制點與圖根點之測設及管理維護檢測工作之產能及效率；則對全國性 e-GPS 衛星定位基準站建置之網形規劃是否合宜，本研究方法與結果更可提供即時的助益。當區域越大，達到整個台灣地區時，控制點網形越趨龐大而複雜，由本研究所提出之最大移位向量法則可更有效率的求得網形穩健度。

七、結論

Vaniček 計算法與最大移位向量法，兩種計算方法所求算出之穩健度指標值大約相等，整個網形穩健度強弱分佈趨勢，亦呈一致性。本實驗例較弱的穩健度發生在整個網的南區。以 Vaniček 計算法求算時每一點位之變形向量 e_i 皆須重複執行 n 次的迴圈來求解，計算效率較低，而最大移位向量法，可簡化計算程序，提升運算速率。

本文之實驗例顯示，Vaniček 計算法與最大移位向量法，兩種方法所計算出的穩健度指標，除了局部微旋轉外，平均應變與總剪應變在統計上並不具有等值性，其原因乃由 Vaniček 計算法計算得之同一點位的各個最大變形指標 $(|\mathcal{G}_{\max}|, |\gamma_{\max}|, |\delta\omega_{\max}|)$ ，並不一定來自同一個觀測量，惟某單一最大變形指標必僅來自單一觀測量。而由最大移位向量法計算得的最大變形指標 $(|\mathcal{G}_{\max}|, |\gamma_{\max}|, |\delta\omega_{\max}|)$ ，對任一點位而言，其變形向量 $e_{i_{\max}}$ 皆為唯一，所有的穩健度指標均來自同一向量 δX_{\max} ；而其所獲之某一最大變形指標，其觀測量是多元的，即可能來自二個以上的觀測量。

變形指標值與多餘觀測數呈負中度相關，顯示變形指標值大小非全然由多餘數來決定。本研究之實驗例顯示，藉由調整觀測量的權、改變外圍點位之連線數目，以及改變點位數目等方法，確實可達到調整網形穩健度之目的，對提昇整個台灣 GPS 控制網之穩健度有很大助益。

參考文獻

1. 陶本藻編著，「測量數據統計分析」，測繪出版社，第 175-183 頁(1992)。
2. Baarda W., "A testing procedure for use in geodetic networks". Publ Geodesy(New Series)

- vol.2, No.5, Netherlands Geodetic Commission, Delft.(1968).
3. Hsu R., "Pre-computing influences of observation for a network", *Journal of Surveying Engineering*, vol. 126, No.1,pp 8-17(2000).
 4. Hsu R., S. Li , "Decomposition of deformation primitives of horizontal geodetic networks: application to Taiwan's GPS network", *Journal of Geodesy*, vol. 78, Issue 4-5,pp 251-262(2004).
 5. Seemkoeei A. A., "Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks", *Journal of Geodesy*, vol. 75, Issue 4, pp227-233(2001a).
 6. Seemkoeei A. A., "Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength", *Journal of Surveying Engineering*, vol. 127, No. 3, August 2001, pp 104-117(2001b).
 7. Vaniček P. , Krakiwsky E. J., Craymer M. R.,Geo Y., Ong P., " Robustness analysis" , Contract rep 91-002, Geodetic Survey Division, Geomatics Canada, Ottawa. (1991).
 8. Vaniček P., Craymer M. R., Krakiwsky E. J., "Robustness analysis of geodetic horizontal networks", *Journal of Geodesy*, vol.7375, Issue 4, pp199-209(2001).