LAMBDA 法之低相關化策略

Decorrelation Strategies of the LAMBDA Method

高書屏[1]　　涂裕民[2]　　李旭志[3]
Szu-Pyng Kao Yuh-Min Tu　Hsu-Chih Lee

摘　要

GPS測量中快速求解週波未定值問題，一直受到相當程度的注意。只有在求得正確的週波未定值後，高精度的定位才有可能實現。LAMBDA方法這幾年被廣泛的應用在各種導航及大地測量中，也吸引了許多研究者相繼投入這個議題。對於許多即時測量的應用中，計算時間是輜珠必較，本研究在探討低相關化策略，試著縮短計算所需的時間。

關鍵字： LAMBDA法、低相關化策略

Abstract

The fast ambiguity resolution in GPS positioning has received considerably attention during the past decades. Once the integer ambiguities are fixed correctly, the high-precision positioning solutions can be attained. The least-squares ambiguity decorrelation(LAMBDA) method has been employed in many geodetic and navigation applications. Many researchers devoted into this topic. For real time application, the computational time is crucial. In this contribution, we investigated the decorrelation strategies and trying to shorten the computational time.

Keywords: LAMBDA, Decorrelation strategy

[1] 國立中興大學土木工程學系副教授
[2] 國立中興大學土木工程學系博士班研究生e-mail:tuym@ntit.edu.tw
[3]國立中興大學土木工程學系博士候選人(內政部土地測量局技正)

一、前言

快速而正確的求解週波未定值向來是全球衛星定位系統(Global Navigation Satellite System ,GNSS)一個重要的課題，只有正確的求解週波未定值，衛星測量才可達到釐米級的理想精度。此一前提不但適用於美國的GPS(Global Positioning System ,GPS)系統，也同樣適用於俄羅斯的GLONASS及甫發射不久歐盟的伽利略(GALILEO)導航衛星系統。

早期的快速求解週波未定值可追溯到1981年 Counselman及Gourevith,模糊函數法(Ambiguity Function Method，AFM)，此法後來經Remondi,、Mader等人再整理過。那是非常早期的方法，將觀測方程式轉換成一個2π的指數函數，利用正弦、餘弦對整數乘上2π不敏感的特性，對各組可能的坐標值做搜尋計算，其中一組坐標使函數產生最大值，其對應的未定值即視為正確解。這個方法因對所有坐標搜尋計算，所以非常耗時。舉例來說，假定有一2公尺立方之範圍被視為搜尋範圍，以每2公分×2公分×2公分的間隔搜尋，共有10^6個點位必須搜尋，其工作量可見一般。(Tu，1991)

1993年Abidin,提出On-the-fly (OTF) Ambiguity Resolution.的方法，此方將搜尋的空間以橢球表示，而橢球的形狀大小則巧妙的運用變方-協變方矩陣所提供的資訊。

接續下來有許多學者以最小二乘法為基礎，不同的是在搜尋的方法做一些變化如：1990年Hatch提出 the Least Square Ambiguity Search Technique. (LSAST)；1990年Frei and Beutler提出the Fast Ambiguity Resolution Approach (FARA)；1992年Euler and Landau提出the modified Cholesky decomposition method；1993年Teunissen提出Least-square AMBiguity Decorrelation Adjustment (LAMBDA)；1995年Martin-Neira et al.提出the null space method ；1995年Chen and Lachapella提出 the Fast Ambiguity Search Filter (FASF) ；1999年Kim and Langley,提出the Optimal Method for Estimating GPS Ambiguity (OMEGA) 等(Kim ，2000)。

這些方法基本上採三個步驟，第一步將週波未定值視為實數求解，求得一帶有小數之未定值，第二步以搜尋的方法找出確定整數未定值，第三步將正確的整數帶回求解基線。每一種方法基本上都是應用了第一步方法中得到的變方協變方矩陣做為重要的基礎資訊，而在後續的搜尋中採用了不同的技巧與變化。

二、 LAMBDA法回顧

各種方法中， Teunissen的「LAMBDA」法所引起的討論與引用最多，其原理介紹如下(Teunissen,1997)。

由最小二乘法原理可將載波相位觀測方程式表示如下：

$$y = Aa + Bb + e \tag{1}$$

y： 二次差分之觀測向量減去計算向量
a： 未知之二次差分整數週波未定值.
b： 未知之基線向量.
A,B： 分別代表週波未定值及坐標向量之係數矩陣
e： 殘差

（1）式採用二次差分（double difference）之方法，進行相位觀測量之基線求解，此乃一般為將衛星及接收儀之時鐘差予以消除最常用之計算方法，非絕對必要，本法亦可採用一次差分觀測量，甚至未差分之觀測量。

依最小二乘法原理，為了滿足殘差的平方和最小，須求解：

$$\min_{a,b} \left\| y - Aa - Bb \right\|_{Q_y}^2 \tag{2}$$

其中 $a \in Z^n$

$b \in R^3$

Q_y 觀測量之變方-協變方矩陣

$$\left\| \bullet \right\|_{Q_y}^2 = (\bullet)^T Q_y^{-1} (\bullet)$$

由於 a 是整數向量，b 是實數向量，這是最小二乘法加上限制條件的平差問題，因有 $a \in Z^n$ 週波未定值須為整數的限制，或稱為整數最小二乘法平差(Integer Least Square, ILS)。這問題通常可以分三個步驟來進行，第一，用一般的最小二乘法求得含有小數點的週波未定值的初解 $\hat{a}$、基線向量的初解 $\hat{b}$ 及其相對應之變方-協變方矩陣：

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\hat{a}} & Q_{\hat{a}\hat{b}} \\ Q_{\hat{b}\hat{a}} & Q_{\hat{b}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

第二，在實數初解的基礎上，計算$\hat{a}$所對應的整數解$\check{a}$：

$$\check{a} = F(\hat{a}) \tag{4}$$

第三，利用求得的$\check{a}$，代回原來的方程式求精確的$\check{b}$：

$$\check{b} = \hat{b} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - \check{a}) \tag{5}$$

LAMBDA法的精神在於將此複雜費時的求解問題，變成一個較為省時、有效率計算模式 。它將週波未定值變方-協變方矩陣$Q_{\hat{a}}$低相關化（Z-轉換），使原來的矩陣幾乎變成一個對角元素矩陣。Z矩陣與$Q_{\hat{a}}$有如下關係：

$$z = Z^T a \text{ ；} \hat{z} = Z^T \hat{a} \text{ ；} Q_{\hat{z}} = Z^T Q_{\hat{a}} Z \tag{6}$$

經 Z-轉換後, 原週波未定值搜尋空間做了一個變換。變成一個較易搜尋的空間。最後，再將這些最求得之整數週波未定值代回方程式，可得精確之基線解。另為確認所求之週波未定值正確無誤，最安全之方法即為利用統計測試的方法，做最後驗證，如果通過即表示所求為正確答案。總結LAMBDA法可以圖1表示。

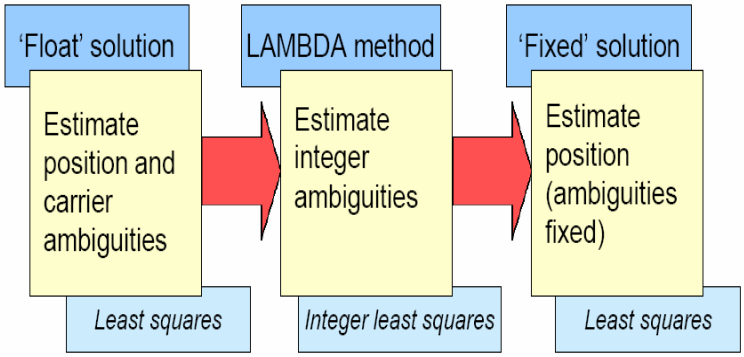

圖1： LAMBDA法示意圖(摘錄自2002, Eissfeller)

三、LAMBDA法改進策略

LAMBDA法的目的是要降低週波未定值之變方-協變方矩陣$Q_{\hat{a}}$元素間的相關性，即約化後的Q_z矩陣儘可能變成對角矩陣，其非對角線元素愈小愈好。其做法是利用整數高斯轉換法（Integer Gauss Transformation）對$Q_{\hat{a}}$反覆進行約化轉換，以求得一個整數的轉換矩陣Z，使得後續對整數週波未定值的搜尋更有效率。約化的過程始於將 $Q_{\hat{a}}$分解為$L^T D L$ ，並由後續的反覆約化中將 $L^T D L$ 不斷覆寫更新而成為Q_z 的分解因子。

Teunissen 所提出的二維低相關化方法中只敘述了低相關化是在二維空間內執行，並未明確闡明二維空間操作的對象（許榮欣，2005）。因此有很多的專家學者提出較為具體的演算策略，或在既有的方法中加以改進，如上三角的Cholesky 分解法、回代解算的LAMBDA法(周揚眉，2005)；聯合變換矩陣低相關化法(United ambiguity decorrelation)(Liu，1999)等。

LAMBDA法約化過程中的另一個動作，是不斷的在列與列或行與行中進行互換的動作，讓對角矩陣D之元素d_k依一定的大小順序排列，這個動作佔用了約化大部份的時間(Chang，2005)。LAMBDA法中的低相關化是採用循序法由右至左進行，而當它找到一個關鍵指標k時，由（k，K+1）這一對進行互換，互換後指標又跑回k=n-1，行列間的互換與整數高斯轉換法交互使用時，又產生了重覆執行的情形，因此Chang(ibid)提出來改進的方法：

（1） 與其由k=n-1到k=1的順序尋找關鍵指標k，不如以變化率來尋找k。

（2） 一開始只對部份L矩陣的元素做整數高斯轉換，然後進行互換。

（3） 互換時整數高斯轉換只針對部份有變化的元素，而非所有元素。

（4）整個互換結束時，再對非對角線元應用整數高斯轉換。

四、計算實例

本文針對Chang提出的方法，以matlab6.5撰寫程式，將改進的方法與原始的LAMBDA法比較。本文採用兩個的計算實例。算例1 (De Jonge，1996)

$$Q_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} 6.290 & 5.978 & 0.544 \\ 5.978 & 6.292 & 2.340 \\ 0.544 & 2.340 & 6.288 \end{bmatrix}$$

經低相關化後得到矩陣

$$Q_{\hat{z}} = \begin{bmatrix} 4.4760 & 0.3340 & 0.2300 \\ 0.3340 & 1.1460 & 0.0820 \\ 0.2300 & 0.0820 & 0.6260 \end{bmatrix}$$

同理算例2計算矩陣$Q_{\hat{a}}$ (Liu et al.，1999)，得低相關化後矩陣$Q_{\hat{z}}$

$$Q_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} 81.708 & 34.090 & 75.934 & 78.342 & 94.720 & 146.448 \\ 34.090 & 19.611 & 31.422 & 34.344 & 49.839 & 64.905 \\ 75.934 & 31.422 & 70.641 & 72.615 & 87.351 & 135.801 \\ 78.342 & 34.344 & 72.615 & 76.029 & 94.675 & 141.869 \\ 94.720 & 49.839 & 87.351 & 94.675 & 131.472 & 177.552 \\ 146.448 & 64.905 & 135.801 & 141.869 & 177.552 & 265.416 \end{bmatrix}$$

$$Q_{\hat{z}} = \begin{bmatrix} 0.6670 & -0.2410 & 0.1870 & -0.0270 & 0.0710 & 0.0310 \\ -0.2410 & 0.5470 & -0.1330 & -0.0150 & -0.1610 & 0.0470 \\ 0.1870 & -0.1330 & 0.4200 & -0.0520 & -0.0070 & 0.0230 \\ -0.0270 & -0.0150 & -0.0520 & 0.3920 & -0.1250 & -0.0030 \\ 0.0710 & -0.1610 & -0.0070 & -0.1250 & 0.3870 & -0.0330 \\ 0.0310 & 0.0470 & 0.0230 & -0.0030 & -0.0330 & 0.0950 \end{bmatrix}$$

經比較後低相關化後矩陣均以原案相同，對每個方法均以程式執行10次後，比較其程式執行時間之平均值得下表：

算例	方法	Elapsed time
算例1	原Lambda法	0.0153
算例1	改進Lambda法	0.0152
算例2	原Lambda法	0.0157
算例2	改進Lambda法	0.0156

表1：原Lambda法與改進法計算時比較

五、討論

本文參考Chang所提出的方法，針對矩陣約化的部份撰寫程式。並將此一方法與原先的LAMBDA法比較，經比較後，不管是改進後的方法與原先的方法，在計算時間上相差無幾，其實均在同一個時間等級中，看不出明顯的區別，這可能是因為本文所採用的計算實例，其計算矩陣僅3維及6維，也許是所選的計算例的問題，尚顯現不出其效力，有待作者再進一步的探討、確認。有鑒於歐盟伽利略衛星系統的加入及美國國防部GPS系統現代化，新的衛星系統均採用3頻設計(Eissfeller，2002)，且屆時GPS/Galileo兩系統結合後，每一次求解未定值，都會使到更多維的矩陣，應可顯現出改進方法的效率。

參考文獻

周揚眉，劉經南，劉基余(2005) 回代解算的LAMBDA方法及及其搜索空間 測繪學報 第34卷 第4期 pp,300-304

許榮欣，張伯偈(2005) LAMBDA法中週波未定值二維低相關化演算策略之研究 第24屆測量學術及應用研討會,pp,589-600國立政治大學

Chang XW，Yang X, Zhou T(2005) MLAMBDA：A modified LAMBDA method for integer least-squares estimation. Journal of Geodesy, Vol.79,pp. 552-565.

de Jonge PJ，Tiberius CCJM (1996) The LAMBDA method for integer ambiguity estimatio，n：implementation aspects. Delft Geodetic Computing Centre LGR Series，No 12，Delft University of Technology

Eissfeller B， Tiberius C， Hein G，Pany T(2002) Real-Time kinematic in the light of GPS modernisation and Galileo. GPS World Oct. 2002

Kim D， Langley RB (2000): GPS ambiguity resolution and validation : Methodologies, Trends and Issues. International Symposium on GPS/GNSS, Seoul, Korea , Nov,30-Dec.2

Liu LT, Hsu HT, Zhu YZ, Ou JK(1999) A new approach to GPS ambiguity decorrelation. Journal of Geodesy, Vol.73,pp. 478-490.

Teunissen PJG., de Jonge PJ and Tiberius, CCJM (1997) , The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: its performance on short GPS baselines and short observation span. Journal of Geodesy, Vol.71,pp. 589-602.

Teunissen ,PJG.(1999) An optimality property of the integer least-squares estimator. Journal of Geodesy, Vol.73,pp.587-593

Tu YM(1991) Fast ambiguity resolution in GPS positioning Master thesis, The university of Newcastle upon Tyne.