

# 網形穩健度不同計算法之統計等值性檢定

## Equivalence test for the robustness of horizontal geodetic networks due to different approaches

許榮欣<sup>1</sup>      高書屏<sup>2</sup>      李旭志<sup>3</sup>      林雅婷<sup>4</sup>

Rongshin Hsu   Szu-Pyng Kao   Hsu-Chih Lee   Ya-Ting Lin

### 摘 要

穩健度分析所探討的是當觀測量中含有未被偵測出的粗差時，將會對於網點產生什麼影響，除了 Vaniček 所提出的穩健度理論，本文中將介紹陶本藻所提出的穩健度計算法。因為採用的方法不同，分析出之各個網點的三種變形指標值亦不相同，文中以平面大地網為研究資料，利用 Vaniček 與陶氏的方法進行穩健度計算，則每個網點都會有兩組不同的變形指標值，最後透過統計方法來檢驗這兩種方法所計算出的變形指標，對一測量網而言，在統計上是否具有等值性。

**關鍵詞：**穩健度、等值性檢定、等值性。

### Abstract

In addition to the original Vaniček's approach to the network's robustness, the Tao's approach is introduced. Two sets of three deformation measures at each point of the network are then created due to the two approaches. To discern the features of one approach from the other, the equivalence test is proposed to examine the network as a whole for the statistical equalities between the two sets of the deformation measures generated by individual approaches.

**Keyword :** Robustness, Equivalence test, Equality

---

<sup>1</sup> 國立台灣大學土木工程學系教授，e-mail：[rshsu@ntu.edu.tw](mailto:rshsu@ntu.edu.tw)

<sup>2</sup> 國立中興大學土木工程學系副教授

<sup>3</sup> 國立中興大學土木工程學系博士候選人、內政部土地測量局技正

<sup>4</sup> 國立台灣大學土木工程學系碩士班研究生

## 一、前言

測量網中的觀測量不免存有未被偵測出的粗差，傳統上常以可靠度來加以分析粗差對網的影響(Baarda, 1968)。然而，一具有優良內、外可靠度的網，並不能保證其個別網點都具有可靠的估計位置。Vaniček et al.(1991, 2001)提出了穩健度分析理論，利用尺度、形狀及局部微旋轉等獨立的變形指標，來量化點位及網形的穩健度。根據 Seemkooei(2001a、b)所作的模擬實驗顯示，在大部分的情形下，由於測量網之外圍點位之測線數少，常是弱穩健度的點位所在，在其文中並提到弱穩健度乃是由於點位上之多餘觀測數較小所致。陶本藻(1992)建議，由各觀測量所產生之點位坐標移位向量所組成之矩陣中，取各列(Row)中最大值，構成新的移位向量，所求得的變形指標，可用來衡量全網的平均變形。

Hsu(2004)推演出變形指標與觀測值多餘觀測數的函數關係，進而與 Baarda(1968) 的可靠度理論建立連繫，並將 Vaniček et al.(1991, 2001)的穩健度理論作進一步推導。Hsu(2004)的研究顯示，穩健度較差的點位，起因於這些點位的內群體觀測量之多餘觀測數總和較小。李旭志等(2005)將 Vaniček et al.( 2001)的穩健度理論由 2D 推展至 3D，並提出合宜的量化指標，以適用於包括 GPS 及各種測量網形。

本文以台灣中西部(中、彰地區)的一、二等控制點建構平面大地網為研究例，針對 Vaniček 與陶氏的計算法進行穩健度等值性檢定分析。

## 二、變形指標

觀測量中之粗差導致測量網內點位之移位，欲衡量點位變形之方法為求取移位量之梯度。假設點位  $P_i(x_i, y_i)$  之移位量為：

$$\begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_i \\ u_i \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

$P_i$  之變形矩陣為(Vaniček et al 1991, 2001)：

$$E_i = grad \left( \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_i}{\partial x} & \frac{\partial t_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

藉由變形矩陣  $E_i$ ，可組成三個衡量點位變形之變形指標。

A. 平均應變(Mean strain)  $\varrho$

$$\varrho = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2-3)$$

平均應變(Mean strain)描述研究點處的平均伸縮或增長量，表尺度變形(Deformation in scale)。

B. 總剪應變(Total shear)  $\gamma$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\tau^2 + \nu^2} \quad (2-4)$$

(2-4)式中，純剪應變(Pure shear)為： $\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ，表二線間之間距變化；簡剪應變(Simple shear)為： $\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \right)$ ，表二線間夾角變化，而研究點之總剪應變  $\gamma_{xy}$  為純剪應變與簡剪應變取幾何平均，是為形狀變形(Deformation in shape)。

C. 局部微旋轉( Local differential rotation)  $\delta\omega$

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y} \right) \quad (2-5)$$

(2-5)式中  $\omega$  研究點處  $Z$  軸之微小旋轉(Differential rotation)；以  $\omega_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i$  表所有網點微小旋轉之均值(Mean)， $m$  表網點總數。每個網點之微小旋轉  $w_i$  若扣除整體平均值，可真正求得代表各個網點之局部微旋轉  $\delta\omega$ 。

$$\text{即 } \delta\omega = \omega - \omega_0 \quad (2-6)$$

### 三、變形向量及穩健度計算

Vaniček(2001)建議，欲衡量測量網內點位之穩健度，可採用原始之網形各點位上之測線，抑或研究點處方圓  $r$  公里內之測線。

設與研究點  $P_i$  作聯測之點為  $P_j (j=1,2,\dots,s)$ ，則變形向量與移位量之關係式 (Vaniček et al, 2001, Hsu, 2004)：

$$e_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_i}{\partial x} \\ \frac{\partial t_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s \\ U_s \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

上式中  $T_s = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_s]^T$ ， $U_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_s]^T$ ， $Q_i$  為刪除  $(K_i^T K_i)^{-1} K_i^T$  矩陣之第一列後之矩陣，其中  $K_i = [1 \ (x_j - x_i) \ (y_j - y_i)]$  ( $j=1,2,\dots,s$ , 含  $j=i$ )。

將(3-1)式中之移位向量  $[T_s \ U_s]^T$  擴及全網，設全網之移位向量為  $\delta X$ ，而研究之測量網共有  $m$  個點位，便可重新組成一維度為  $4 \times 2m$  的  $S_i$  矩陣，裏頭的元素是由  $Q_i$  及零組成，利用整個網形的移位向量，可改寫(3-1)式為：

$$e_i = S_i \delta X = S_i N^{-1} A^T P \delta L \quad (3-2)$$

上式中， $\delta X = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_m \ q_1 \ q_2 \ \dots \ q_m]^T$ ， $\delta L$  表觀測粗差向量。

將(3-2)式中的觀測粗差向量  $\delta L$  改為第  $k$  個觀測量中最大未被偵測出來的粗差向量  $\nabla_k = [0 \ \dots \ \nabla_{ok} \ 0 \ \dots]^T$ ， $k=1,2,\dots,n$ ， $n$  為觀測量總數。

$|\nabla_{ok}| = \frac{\sigma_k \delta_0}{\sqrt{r_k}}$  表示在顯著水準  $\alpha$  及檢驗功效  $\beta$  之下觀測值未被偵測出之粗

差。 $\delta_0$  為非中心化參數， $\sigma_k$  表  $L_k$  的觀測標準差， $r_i$  表其多餘觀測數。改寫

(3-2)式為：

$$e_i^k = S_i \delta X_k = S_i N^{-1} A^T P \nabla_k \quad (3-3)$$

上式中， $\delta X_k$ 表由 $\nabla_k$ 所引起的移位向量。

### 3-1. Vaniček 計算法

由(3-3)式知，對每個點位而言，每個觀測量都可產生一個 $e_i^k$ ，因此共有 $n$ 個變形矩陣；而在穩健度分析裏每一矩陣 $E_i$ 可以產生3個變形指標，所以每一點位上可算得 $3n$ 個變形指標，即 $\varrho, \gamma, \delta w$ 各有 $n$ 個。

依據 Vaniček(2001)，每一變形指標皆取絕對值最大者，作為代表研究點之穩健度，吾人可以 $|\varrho_{\max}|, |\gamma_{\max}|, |\delta w_{\max}|$ 來表示點位的穩健度指標，絕對值愈小表點位愈穩健愈不易受粗差影響。依此方法，計算時每一點位之變形向量 $e_i^k$ 皆須重複執行 $n$ 次的迴圈(Do-Loop)來求解，計算效率降低很多。

### 3-2. 陶氏計算法

有別於 Vaniček 的求算法，陶本藻(1992)的方法乃將(3-3)式中， $\delta X_k = N^{-1} A^T P \nabla_k$ 表示為

$$\delta X_k = \begin{bmatrix} \delta x_{1k} \\ \delta x_{2k} \\ \vdots \\ \delta x_{uk} \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3-4)$$

(3-4)式中，第 $i$ 列( $i = 1, 2, \dots, u$ )表示第 $i$ 個參數(坐標分量 $x_i$ )受粗差影響所產生的偏離量。陶氏法即是由每一觀測量 $k$ 所形成之點位坐標移位向量 $\delta X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )，來組成 $2m \times n$ 之矩陣 $B$ ，並取 $B$ 矩陣之各列(Row)中最大值，構成新的移位向量

$$\delta X_{\max} = [\delta x_{1\max} \quad \delta x_{2\max} \quad \dots \quad \delta x_{u\max}]^T \quad u = 2m \quad (3-5)$$

即 $\delta X_{\max}$ 之元素為各網點上最大坐標移位向量所組成。經此，所算得變形向量

$$e_{i\max} = S_i \delta X_{\max} \quad (3-6)$$

由(3-6)式計算得的穩健度指標表示為  $|\varrho|_{\max}, |\gamma|_{\max}, |\delta\omega|_{\max}$ ，如此，對任一  
 點位而言，其變形向量  $e_{i_{\max}}$  皆為唯一的，所有的穩健度指標均來自同一向量  
 $\delta X_{\max}$ ，可簡化計算程序，提升運算速率。

#### 四、等值性檢定

經過 Vaníček 法與陶氏法計算，每個網點都會有兩組不同的變形指標  
 值，透過統計的等值性檢定，來檢驗這兩種方法所計算出的變形指標在統  
 計上是否具有等值性。

令  $S(|j_{\max}|)$  表示由 Vaníček 法算得的變形指標  $|j_{\max}|$  之群組  
 ( $|j_{\max}| = |\varrho|_{\max}$  或  $|\gamma|_{\max}$  或  $|\delta\omega|_{\max}$ )，而  $S(|\tilde{j}|_{\max})$  表示由陶氏法求算的變形指標  
 $|\tilde{j}|_{\max}$  之群組 ( $|\tilde{j}|_{\max} = |\varrho|_{\max}$  或  $|\gamma|_{\max}$  或  $|\delta\omega|_{\max}$ )。為了等值性檢定，假設兩個群  
 組的指標值具有同一平均值及變異數之常態分佈。

令  $\hat{\sigma}_1^2$  與  $\hat{\sigma}_2^2$  表示兩群組中某變形指標對(例如  $|\varrho|_{\max}$  與  $|\varrho|_{\max}$ )之樣本變異  
 數， $\hat{\sigma}_1^2$  為兩變異數中較大者。為檢定二變異數是否具有相等性，可以 F 統  
 計量來實施。若在定顯著水準  $\alpha$  下，樣本統計量：

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} > F_{\alpha/2, m-1, m-1} \quad (4-1)$$

則假說  $H_0 : \hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2$  被拒絕。

若  $H_0$  假設被接受，則繼續以 t 統計量來做平均值相等性檢定。令  $|\bar{j}_{\max}|$   
 與  $|\tilde{j}_{\max}|$  分別表示兩群組  $S(|j_{\max}|)$  與  $S(|\tilde{j}|_{\max})$  中變形指標對的平均值。若在定  
 顯著水準  $\alpha$  下，樣本統計量：

$$t = \left| \frac{\Delta}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}} \sqrt{m-1} \right| < t_{\alpha/2, 2m-2} \quad (\Delta = |\bar{j}_{\max}| - |\tilde{j}_{\max}|) \quad (4-2)$$

則假說  $H_0 : |\bar{j}_{\max}| = |\tilde{j}_{\max}|$  被接受。

## 五、實驗成果及分析

本研究以台灣中西部(中、彰地區)的一、二等控制點建構平面大地網(採用研究點處方圓 10 公里內之測線組成之基線向量網)為研究例，本測試網以 5 個一等點(M043、M044、M045、M049、M085)當已知點，60 個二等點當研究點(如圖 1)。採用高斯—馬可夫平差模式(Gauss-Markov Model)以坐標變分法列出邊觀測方程式，並選定顯著水準  $\alpha$  為 0.05 及檢驗功效  $\beta$  為 0.80 下之非中心化參數  $\delta_0 (=2.80)$  值。

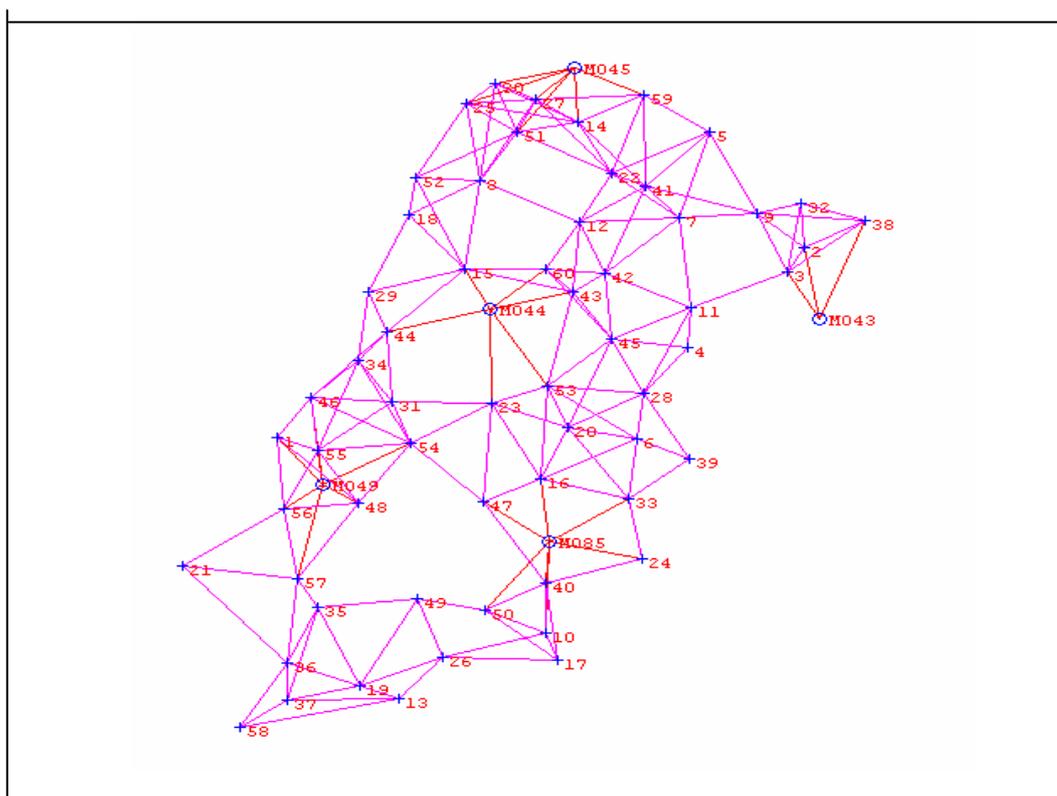


圖 1 台灣中西部一、二等控制點平面大地網

由 (4-1) 及 (4-2) 知，選定顯著水準  $\alpha$  為 0.05 時，  
 $F_{\alpha/2, m-1, m-1} = F_{0.025, 59, 59} = 1.6741$ ；  $t_{\alpha/2, 2m-2} = t_{0.025, 118} = 1.9803$ ；而當選定顯著水準  $\alpha$   
 為 0.025 時， $F_{\alpha/2, m-1, m-1} = F_{0.0125, 59, 59} = 1.8045$ ；  $t_{\alpha/2, 2m-2} = t_{0.0125, 118} = 2.2704$ 。

對 Vaniček 法與陶氏法所求算之每個網點的兩組不同的變形指標值，

透過上述統計方法的等值性檢定分析值，如表 1 所示。

表 1 等值性檢定分析值

	$ g_{\max} $	$ g _{\max}$	$ \gamma_{\max} $	$ \gamma _{\max}$	$ \delta\omega_{\max} $	$ \delta\omega _{\max}$
Mean	1.35E-06	1.83E-06	1.17E-06	1.50E-06	1.00E-11	-4.87E-11
Variance	2.94E-12	7.69E-12	1.21E-12	2.55E-12	1.28E-11	1.02E-11
F	2.618		2.109		1.249	
t	1.125		1.321		0.000	

由表 1 知，只有局部微旋轉( Local differential rotation)  $\delta\omega$  通過 F-test 及 t-test，由此分析知：除了局部微旋轉外，Vaniček 法與陶氏法所計算出的變形指標，在統計上並不具有等值性。

## 六、 結論

Vaniček 法計算時每一點位之變形向量  $e_i$  皆須重複執行 n 次的迴圈 (Do-Loop) 來求解，計算效率低。而陶氏法對任一測量網而言，其變形向量  $e_{i_{\max}}$  為唯一的，所有網點的穩健度指標均來自同一向量  $\delta X_{\max}$ ，可簡化計算程序，提升運算速率。

本研究之算例似乎顯示，Vaniček 法與陶氏法兩種方法所計算出的變形指標，除了局部微旋轉外，平均應變與總剪應變在統計上並不具有等值性。

## 七、 參考文獻

- 1.李旭志、林雅婷、高書屏、許榮欣，2005，3D 網形穩健度分析研究-以台中市圖根點監測網為例，地籍測量，第 24 卷第 1 期，第 57-77 頁。
- 2.陶本藻編著，1992，測量數據統計分析，測繪出版社，第 175-183 頁。
- 3.Baarda W, 1968, "A testing procedure for use in geodetic networks". Publ. Geodesy (New Series) vol.2, No.5, Netherlands Geodetic Commission, Delft.
- 4.Hsu R, S.Li, 2004, "Decomposition of deformation primitives of horizontal geodetic networks: application to Taiwan's GPS network", Journal of Geodesy, vol. 78, pp 251-262.
- 5.Seemkooei A. A., 2001a, "Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks", Journal of Geodesy, vol. 75, pp227-233.
- 6.Seemkooei A. A., 2001b, "Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength", Journal of Surveying Engineering, vol. 127,

No. 3, pp104-117.

7. Vanicek P., Krakiwsky EJ, Craymer MR, Geo Y, Ong P, 1991, "Robustness analysis", Contract rep 91-002, Geodetic Survey Division, Geomatics Canada, Ottawa.
8. Vanicek P., Craymer M. R., Krakiwsky E.J. 2001, "Robustness analysis of geodetic horizontal networks", Journal of Geodesy, vol.75, pp199-209.

