第九次（民國 88～90 年）國民生命表函數定義及編算方法

壹、國民生命表函數定義

生命表係將特定範圍之全體人口，就其死亡因年齡而異所產生之狀況，以各種函數表示之統計表。生命表各種函數之意義如下：

一、生存機率 (Probability of Surviving)：

${}_n p_x$ ：已達某年齡 (x 歲) 者，其到達 $x+n$ 歲時仍生存之機率。單一年齡生存機率 ($n=1$) 則以 p_x 表示。

二、死亡機率 (Probability of Death)：

${}_n q_x$ ： x 歲者達到 $x+n$ 歲前可能遭受死亡之機率。若 $n=1$ ，則以 q_x 表示。

三、生存數 (Number of Survivors)：

l_x ：一定之出生人數 (通常為 100,000 人)，其到達某年齡 (x 歲) 時尚生存的人數。

四、死亡數 (Numbers of Death)：

${}_n d_x$ ： x 歲時之生存數在達到 $x+n$ 歲前之死亡人數。若 $n=1$ ，則以 d_x 表示。

五、定常人口 (Stationary Population)：

假設死亡秩序不變，經過一段時間其人口之年齡結構並未因此而有所變動，此種狀態之人口稱為「定常人口」。

${}_n L_x$ ：為 x 歲至 $x+n$ 歲年齡組距間之定常人口數。

$${}_n L_x = \int_x^{x+n} l_t dt$$

在 UDD (Uniform distribution of death; 均勻死亡) 假設下，其計算式為：

$$L_x \approx \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

T_x ：為由 x 歲至所有以後各歲之定常人口總數。其計算式為：

$$T_x = \int_x^{\infty} l_t dt = \sum_{t=x}^{\infty} L_t$$

六、平均餘命 (Life Expectancy)：

假設一出生嬰兒遭受到某一時期之每一年齡組所經驗之死亡風險後，他們所能存活的預期壽命，亦即達到 X 歲以後平均尚可期待生存之年數，稱為 X 歲之平均餘命。

e_x° ：年滿 X 歲者平均尚可期望生存之年數，故又稱為「預期壽命」。

其計算式為：
$$e_x^{\circ} = \frac{T_x}{l_x}$$

貳、國民生命表各項函數之編算步驟及重要公式

一、未滿一歲生存機率及死亡機率之計算：

(一) 死亡數之分組及符號：

未滿一歲死亡機率（嬰兒死亡率）， q_x ，因距出生時間愈近則愈高，而後隨年齡之增長而急劇下降。因此未滿一歲死亡機率之計算宜採用出生數以代替基礎人口數（戶口普查零歲人口數）。民國 88 年至 90 年三年間，未滿一歲死亡數之集計係按週齡、月齡分為八組，其符號表示，列述如下：

1. $D \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$ ：為 0 日-6 日之死亡數
2. $D \begin{pmatrix} w \\ 2w \end{pmatrix}$ ：為 7 日-13 日之死亡數
3. $D \begin{pmatrix} 2w \\ 3w \end{pmatrix}$ ：為 14 日-20 日之死亡數
4. $D \begin{pmatrix} 3w \\ 4w \end{pmatrix}$ ：為 21 日-27 日之死亡數
5. $D \begin{pmatrix} 4w \\ 2m \end{pmatrix}$ ：為 28 日-59 日之死亡數
6. $D \begin{pmatrix} 2m \\ 3m \end{pmatrix}$ ：為 60 日-89 日之死亡數
7. $D \begin{pmatrix} 3m \\ 6m \end{pmatrix}$ ：為 90 日-179 日之死亡數

8. $D\left(\begin{smallmatrix} 6m \\ 12m \end{smallmatrix}\right)$: 為 180 日-364 日之死亡數

(二) 未滿一歲生存機率之計算公式：

民國 87 年 12 月 25 日至民國 90 年 12 月 24 日四年間之出生數以 $B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.25 \\ 90.12.24 \end{smallmatrix}\right)$ 表示之；民國 88 年 1 月至 90 年 12 月出生數則以 $B\left(\begin{smallmatrix} 88.1 \\ 90.12 \end{smallmatrix}\right)$ 表示之；其餘類推，其他出生數用同樣方法表示之。故各週齡、月齡之生存機率可由下列各式求得：

$${}_wP_0 = 1 - \frac{D\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ w \end{smallmatrix}\right)}{\frac{1}{2} \left[B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.26 \\ 90.12.25 \end{smallmatrix}\right) + B\left(\begin{smallmatrix} 88.1 \\ 90.12 \end{smallmatrix}\right) \right]} \quad (1)$$

$${}_{2w}P_0 = {}_wP_0 - \frac{D\left(\begin{smallmatrix} w \\ 2w \end{smallmatrix}\right)}{\frac{1}{2} \left[B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.19 \\ 90.12.18 \end{smallmatrix}\right) + B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.25 \\ 90.12.24 \end{smallmatrix}\right) \right]} \quad (2)$$

$${}_{3w}P_0 = {}_{2w}P_0 - \frac{D\left(\begin{smallmatrix} 2w \\ 3w \end{smallmatrix}\right)}{\frac{1}{2} \left[B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.12 \\ 90.12.11 \end{smallmatrix}\right) + B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.18 \\ 90.12.17 \end{smallmatrix}\right) \right]} \quad (3)$$

$${}_{4w}P_0 = {}_{3w}P_0 - \frac{D\left(\begin{smallmatrix} 3w \\ 4w \end{smallmatrix}\right)}{\frac{1}{2} \left[B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.5 \\ 90.12.4 \end{smallmatrix}\right) + B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.11 \\ 90.12.10 \end{smallmatrix}\right) \right]} \quad (4)$$

$${}_{2m}P_0 = {}_{4w}P_0 - \frac{D\left(\begin{smallmatrix} 4w \\ 2m \end{smallmatrix}\right)}{\frac{1}{2} \left[B\left(\begin{smallmatrix} 87.11 \\ 90.10 \end{smallmatrix}\right) + B\left(\begin{smallmatrix} 87.12.4 \\ 90.12.3 \end{smallmatrix}\right) \right]} \quad (5)$$

$${}_{3m}P_0 = {}_{2m}P_0 - \frac{D\binom{2m}{3m}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{87.10}{90.9} + B\binom{87.11}{90.10}\right]} \quad (6)$$

$${}_{6m}P_0 = {}_{3m}P_0 - \frac{D\binom{3m}{6m}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{87.7}{90.6} + B\binom{87.10}{90.9}\right]} \quad (7)$$

$${}_{12m}P_0 = {}_{6m}P_0 - \frac{D\binom{6m}{12m}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{87.1}{89.12} + B\binom{87.7}{90.6}\right]} \quad (8)$$

(三) 出生數之推計公式：

上列之各式中之 $B\binom{87.12.26}{90.12.25}$ ， $B\binom{87.12.19}{90.12.18}$ ， $B\binom{87.12.12}{90.12.11}$ ， $B\binom{87.12.5}{90.12.4}$ 等出生數無法獲得實際數字，故由下式推計之

$$B\binom{87.12.26}{90.12.25} = B\binom{88.1}{90.12} + \frac{6}{31}[B(87.12) - B(90.12)] \quad (9)$$

$$B\binom{87.12.19}{90.12.18} = B\binom{88.1}{90.12} + \frac{13}{31}[B(87.12) - B(90.12)] \quad (10)$$

$$B\binom{87.12.12}{90.12.11} = B\binom{88.1}{90.12} + \frac{20}{31}[B(87.12) - B(90.12)] \quad (11)$$

$$B\binom{87.12.5}{90.12.4} = B\binom{88.1}{90.12} + \frac{27}{31}[B(87.12) - B(90.12)] \quad (12)$$

上列各式中 $B(87.12)$ 及 $B(90.12)$ 各表示民國 87 年 12 月及 90 年 12 月之出生嬰兒數。

(四) 未滿一歲死亡機率之計算公式：

將 (9) ~ (12) 式代入 (1) ~ (5) 式，求得下列 (13) ~ (17) 各式：

$${}_wP_0 = 1 - \frac{D\binom{0}{w}}{B\binom{88.1}{90.12} + \frac{6}{62}[B(87.12) - B(90.12)]} \quad (13)$$

$${}_{2w}P_0 = {}_wP_0 - \frac{D\binom{w}{2w}}{B\binom{88.1}{90.12} + \frac{19}{62}[B(87.12) - B(90.12)]} \quad (14)$$

$${}_{3w}P_0 = {}_{2w}P_0 - \frac{D\binom{2w}{3w}}{B\binom{88.1}{90.12} + \frac{33}{62}[B(87.12) - B(90.12)]} \quad (15)$$

$${}_{4w}P_0 = {}_{3w}P_0 - \frac{D\binom{3w}{4w}}{B\binom{88.1}{90.12} + \frac{47}{62}[B(87.12) - B(90.12)]} \quad (16)$$

$${}_{2m}P_0 = {}_{4w}P_0 - \frac{D\binom{4w}{2m}}{B\binom{88.1}{90.12} + \frac{1}{2}[B(87.12) - B(90.12)] + \frac{58}{62}[B(87.12) - B(90.12)]} \quad (17)$$

由上列 (13) ~ (17) 及 (6) ~ (8) 各計算公式，可求得各週齡、月齡之生存機率及死亡機率之計算公式如下：

$${}_wP_o = {}_wP_o \quad (18) \qquad {}_wq_0 = 1 - {}_wP_o \quad (26)$$

$${}_wP_w = \frac{{}_{2w}P_o}{{}_wP_o} \quad (19) \qquad {}_wq_w = 1 - {}_wP_w \quad (27)$$

$${}_wP_{2w} = \frac{{}_{3w}P_o}{{}_{2w}P_o} \quad (20) \qquad {}_wq_{2w} = 1 - {}_wP_{2w} \quad (28)$$

$${}_wP_{3w} = \frac{{}_{4w}P_o}{{}_{3w}P_o} \quad (21) \qquad {}_wq_{3w} = 1 - {}_wP_{3w} \quad (29)$$

$${}_m P_{4w} = \frac{{}_m P_o}{4w P_o} \quad (22)$$

$${}_m q_{4w} = 1 - {}_m p_{4w} \quad (30)$$

$${}_m P_{2m} = \frac{{}_m P_o}{2m P_o} \quad (23)$$

$${}_m q_{2m} = 1 - {}_m p_{2m} \quad (31)$$

$${}_m P_{3m} = \frac{{}_m P_o}{3m P_o} \quad (24)$$

$${}_m q_{3m} = 1 - {}_m p_{3m} \quad (32)$$

$${}_m P_{6m} = \frac{{}_m P_o}{6m P_o} \quad (25)$$

$${}_m q_{6m} = 1 - {}_m p_{6m} \quad (33)$$

二、一歲以上中央死亡率 m_x 及未補整死亡機率 q'_x 之計算：

(一) 基礎人口資料：

1. 基礎人口數 (P_x)：

本次國民生命表之基礎人口，係採民國 89 年年底人口數，而此人口數係按民國 89 年年底戶口及住宅普查按性別及年齡別分之人口數。

2. 基礎死亡數之計算公式：

$$D_x = D_x^{88} + D_x^{89} + D_x^{90} \quad (34)$$

其中 D_x^{88} ：為 88 年 x 歲之死亡數

D_x^{89} ：為 89 年 x 歲之死亡數

D_x^{90} ：為 90 年 x 歲之死亡數

(二) 中央死亡率 m_x 之計算公式：

$$m_x = \frac{D_x}{3P_x} \quad (35)$$

其中 D_x ：為 x 歲之死亡數

P_x ：為 x 歲之人口數

(三) 未補整死亡機率 q'_x 之計算公式：

$$q'_x = \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2}m_x + \frac{1}{12} \left\{ m_x^2 + \frac{1}{2}(m_{x-1} - m_{x+1}) \right\}} \quad (x = 2, 3, 4, \dots) \quad (36)$$

$$q'_1 = \frac{m_1}{1 + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{12}m_1 \left\{ m_1 + \ln \frac{m_2}{m_1} \right\}} \quad (37)$$

其餘各年齡之未補整死亡機率 $q'_2, q'_3 \dots$ ，可由第 (36) 式類推而得。

(四) 按兩性及男、女分別彙編中央死亡率及未補整死亡機率表。

(五) 繪圖觀察及分析

三、未補整死亡機率之補整：

(一) 死亡機率易受偶然波動之影響，所獲得的未補整死亡機率波動頗大，故採用 Whittaker 修勻法予以補整，Whittaker 修勻法一般公式為：

$$q_x = (W + ht(k_z)k_z)^{-1} W q'_x \quad (38)$$

其中 q'_x 為未補整後死亡機率

q_x 為補整後死亡機率

$t(k_z)$ 表示 k_z 的轉秩

$$[K_z]_{i,j} = \binom{z}{j-1} (-1)^{z-j+1} \begin{cases} i=1, 2, \dots, (n-z) \\ j=1, 2, \dots, z+1 \end{cases}, n \text{ 為未補整死亡機率 } q'_x \text{ 的觀}$$

測年齡數。

Whittaker 修勻法中，採用之參數如下：

1. 加權數矩陣 W ：加權數 w_i = 各年齡於民國 89 年年底之單一人口數
2. 平滑性函數 $z=3$
3. 適度性與平滑性的比重： h = 平均各年齡人口數 (1 歲至 98 歲人口總和的平均數)

將各個參數值帶入 (38) 式，即得 Whittaker 修勻法之補整後死亡機率。

高齡死亡機率亦採用 Whittaker 修勻法補整後之修勻值。

(二) 按兩性平均及男、女分別彙編中央死亡率及補整後死亡機率表。

(三) 繪圖觀察及分析

四、高齡死亡機率之推算：

(一) 當死亡機率波動不大時：採 Whittaker 修勻法推算之。

(二) 當死亡機率波動甚大時：採 Whittaker 修勻法與高馬氏 (Gompertz-Makeham) 加權迴歸 (WLS) 之線性組合推算之。

1. 高馬氏加權迴歸 (WLS)

在 Gompertz 假設 ($\mu_x = Bc^x$) 下，我們有

$$\ln(-\ln(p_x)) = \alpha + \beta x \quad (39)$$

可由迴歸方法估計死亡率；也就是在

$$\min_{\alpha, \beta} \sum_x w_x (\ln(-\ln p_x) - \alpha - \beta x)^2 \quad (40)$$

最小化的原則下求得死亡機率估計值。一般迴歸的權數 $w_x = 1$ ，加權迴歸的權數 w_x 為各年齡層的總人口數。

若以矩陣表示，則加權迴歸的參數估計值為

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = (t(A)WA)^{-1} t(A)W \ln(-\ln(p_x')) \quad (41)$$

其中， $p_x' = 1 - q_x'$ ($x = 50, 51, \dots, 98$) 為未補整生存機率 (q_x' 同 (36) 式)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 51 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 98 \end{pmatrix}, \quad [W]_{i,i} = \text{民國 89 年年底 } 49+i \text{ 歲之總人口數}$$

$i=1,2,\dots,49$

將 (41) 式所得之 $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$ 帶回 (39) 式，即可得加權迴歸法補整後之 p_x 。

補整後之死亡機率 q_x 由 $q_x = 1 - p_x$ 即可得知。

2. Whittaker 修勻法與高馬氏加權迴歸 (WLS) 之線性組合

60 至 86 歲採 Whittaker 修勻法與 WLS 之線性組合推算高齡死亡機率，86 歲以後則採 WLS 為補整後之死亡機率，意即：

$$q_{59+i} = \left(1 - \left(\frac{i-1}{26}\right)\right) q_{59+i}^{(Whittaker)} + \left(\frac{i-1}{26}\right) q_{59+i}^{(W.L.S)} \quad i=1,2,\dots,27 \quad (42)$$

$$q_{87+i} = q_{87+i}^{(W.L.S)} \quad i=0,1,\dots,12 \quad (43)$$

五、國民生命表其他諸函數之計算：

(一) 生存數及死亡數之計算：

1. 一歲以下生存數及死亡數之計算：

設一定出生人數，通常基數定為 100,000 人，依據前節所求得之生存機率 ${}_t p_x$ (x, t 代表各週齡及月齡時間，即在 x 時點的人口數到 $x+t$ 時點尚可生存之機率)，計算生存數 l_x 及死亡數 d_x 如下：

$$l_w = l_0 \cdot {}_w p_0 \quad (44)$$

$$l_{2w} = l_0 \cdot {}_{2w} p_0 = l_w \cdot {}_w p_w \quad (45)$$

$$l_{3w} = l_0 \cdot {}_{3w} p_0 = l_{2w} \cdot {}_w p_{2w} \quad (46)$$

$$l_{4w} = l_0 \cdot {}_{4w} p_0 = l_{3w} \cdot {}_w p_{3w} \quad (47)$$

$$l_{2m} = l_0 \cdot {}_{2m} p_0 = l_{4w} \cdot {}_m p_{4w} \quad (48)$$

$$l_{3m} = l_0 \cdot {}_3mP_0 = l_{2m} \cdot {}_mP_{2m} \quad (49)$$

$$l_{6m} = l_0 \cdot {}_6mP_0 = l_{3m} \cdot {}_3mP_{3m} \quad (50)$$

$$l_1 = l_0 \cdot p_0 = l_{6m} \cdot {}_6mP_{6m} \quad (51)$$

$${}_w d_0 = l_0 - l_w = l_0 \cdot (1 - {}_wP_0) \quad (52)$$

$${}_w d_w = l_w - l_{2w} = l_w \cdot (1 - {}_wP_w) \quad (53)$$

$${}_w d_{2w} = l_{2w} - l_{3w} = l_{2w} \cdot (1 - {}_wP_{2w}) \quad (54)$$

$${}_w d_{3w} = l_{3w} - l_{4w} = l_{3w} \cdot (1 - {}_wP_{3w}) \quad (55)$$

$${}_m d_{w4} = l_{4w} - l_{2m} = l_{4w} \cdot (1 - {}_mP_{4w}) \quad (56)$$

$${}_m d_{2m} = l_{2m} - l_{3m} = l_{2m} \cdot (1 - {}_mP_{2m}) \quad (57)$$

$${}_{3m} d_{3m} = l_{3m} - l_{6m} = l_{3m} \cdot (1 - {}_{3m}P_{3m}) \quad (58)$$

$${}_{6m} d_{6m} = l_{6m} - l_1 = l_{6m} \cdot (1 - {}_{6m}P_{6m}) \quad (59)$$

$$d_0 = l_0 - l_1 = l_0 \cdot (1 - p_0) \quad (60)$$

2. 一歲以上生存數及死亡數之計算：

$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x \quad (x \geq 1) \quad (61)$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x \cdot (1 - p_x) \quad (62)$$

(二) 定常人口 L_x 、 T_x 及平均餘命 e_x° 之計算：

假設各年齡間 (x 至 x+1 歲) 之死亡機率均勻分散：

1. 依據定常人口 L_x 之定義，可以下式表示：

$${}_n L_x = \int_x^{x+n} l_t dt \quad (63)$$

在 UDD 假設下，其計算式為： $L_x \approx \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$ (64)

$$2. T_x = \int_x^\infty l_t dt = \sum_{t=x}^\infty L_t \quad (65)$$

$$3. e_x^\circ = \frac{T_x}{l_x} \quad (66)$$

參、特定死因除外國民生命表各項函數之計算

一、基礎資料

(一) 死亡數：民國 88 年至民國 90 年死亡人數按兩性、男性、女性及年齡別分；

基礎死亡數資料為：(參閱公式 (34))

$$D_x = D_x^{88} + D_x^{89} + D_x^{90}$$

(二) 十大死亡原因別死亡數 (依民國 64 年國際簡略死因分類號碼為準)：

分別依兩性、男性、女性及年齡別分之前十大死亡原因別死亡數。

設民國 88 年至 90 年第 i 項死亡原因 x 歲死亡數分別為 ${}_{88}D_x^{(i)}$ 、 ${}_{89}D_x^{(i)}$ 及 ${}_{90}D_x^{(i)}$ ，故第 i 項死亡原因之基礎死亡數為

$$D_x^{(i)} = {}_{88}D_x^{(i)} + {}_{89}D_x^{(i)} + {}_{90}D_x^{(i)} \quad (67)$$

二、特定死因除外未補整死亡機率 $q_x^{(-i)}$ 之計算：

根據公式 (36) 之未補整死亡機率 q_x 計算第 i 項死因除外未補整死亡機率 $q_x^{(-i)}$ ，假設各年齡間之死亡分布為均勻分配， $f_T(t) = q_x$ ， $t \in (0,1)$ ，其計算公式如下：

$$q_x^{(-i)} = q_x \left(\frac{D_x - D_x^{(i)}}{D_x} \right) \quad (68)$$

三、特定死因除外死亡機率 $q_x^{(-i)}$ 之補整與高齡死亡機率之推算：

依據前項特定死因除外未補整死亡機率 $q_x^{(-i)}$ 計算結果，沿用 Whittaker 修勻法補整；對於高齡波動較大的補整死亡機率，則採 Whittaker 修勻法與高馬氏加權迴歸 (WLS) 之線性組合加以推算補整。

四、特定死因除外生命表其他諸函數之計算：

假設第 i 項死因除外補整後之死亡機率為 $q_x^{(-i)}$ ， $p_x^{(-i)} = 1 - q_x^{(-i)}$ 。

(一) 生存數 $l_x^{(-i)}$ 及死亡數 $d_x^{(-i)}$ 之計算：

$$l_{x+1}^{(-i)} = l_x^{(-i)} \cdot p_x^{(-i)} \quad (69)$$

$$d_x^{(-i)} = l_x^{(-i)} - l_{x+1}^{(-i)} \quad (70)$$

(二) 定常人口 $L_x^{(-i)}$ 、 $T_x^{(-i)}$ 及平均餘命 $e_x^{(-i)}$ 之計算：

假設各年齡間 (x 至 x+1 歲) 之死亡機率均勻分散：

$$L_x^{(-i)} \approx \frac{1}{2}(l_x^{(-i)} + l_{x+1}^{(-i)}) \quad (71)$$

$$T_x^{(-i)} = \sum_{t=x}^{\infty} L_t^{(-i)} \quad (72)$$

$$e_x^{(-i)} = \frac{T_x^{(-i)}}{l_x^{(-i)}} \quad (73)$$