第十一次國民生命表函數定義及編算方法

壹、國民生命表函數之定義

生命表係將特定範圍之全體人口，就其死亡因年齡而異所產生之狀況，以各種函數表示之統計表。生命表各種函數之意義如下：

一、生存機率（Probability of Surviving）：

$_{n}p_{x}$：已達某年齡（x 歲）者，其到達 x+n 歲時仍生存之機率。單一年齡生存機率（n=1）則以 p_x 表示。

二、死亡機率（Probability of Death）：

$_{n}q_{x}$：x 歲者達到 x+n 歲前可能遭受死亡之機率。若 n=1，則以 q_x 表示。

三、生存數（Number of Survivors）：

l_x：一定之出生人數（通常為 100,000 人），其到達某年齡（x 歲）時尚生存的人數。

四、死亡數（Numbers of Death）：

$_{n}d_{x}$：x 歲時之生存數在達到 x+n 歲前之死亡人數。若 n=1，則以 d_x 表示。

五、定常人口（Stationary Population）：

假設死亡秩序不變，經過一段時間其人口之年齡結構並未因此而有所變動，此種狀態之人口稱為「定常人口」。

$_{n}L_{x}$：為 x 歲至 x+n 歲年齡組距間之定常人口數。

$$_{n}L_{x}=\int_{x}^{x+n} l_t dt$$

在 UDD(Uniform distribution of death；均勻死亡)假設下，其計算式為：

$$L_x \approx \frac{1}{2}\left(l_x + l_{x+1}\right)$$

T_x：為由 x 歲至所有以後各歲之定常人口總數。其計算式為：

$$T_x = \int_{x}^{\infty} l_t dt = \sum_{t=x}^{\infty} L_t$$

六、平均餘命（Life Expectancy）：

假設一出生嬰兒遭受到某一時期之每一年齡組所經驗之死亡風險後，他們所能存活的預期壽命，亦即達到 x 歲以後平均尚可期待生存之年數，稱為 x 歲之平均餘命。

$\overset{\circ}{e}_x$：年滿 x 歲者平均尚可期望生存之年數，故又稱為「預期壽命」。

其計算式為：$\overset{\circ}{e}_x = \dfrac{T_x}{l_x}$

貳、國民生命表之編算方法

一、未滿一歲生存機率及死亡機率之計算：

（一）死亡數之分組及符號：

未滿一歲死亡機率（嬰兒死亡率）$_{t}q_{x}$，因距出生時間愈近則愈高，而後隨年齡之增長而急劇下降。因此未滿一歲死亡機率之計算宜採用出生數以代替基礎人口數（戶口普查零歲人口數）。民國 108 年至 110 年三年間，未滿一歲死亡數之集計係按週齡、月齡分為八組，其符號表示，列述如下：

1. $D\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$：為 0 日-6 日之死亡數
2. $D\begin{pmatrix} w \\ 2w \end{pmatrix}$：為 7 日-13 日之死亡數
3. $D\begin{pmatrix} 2w \\ 3w \end{pmatrix}$：為 14 日-20 日之死亡數
4. $D\begin{pmatrix} 3w \\ 4w \end{pmatrix}$：為 21 日-27 日之死亡數
5. $D\begin{pmatrix} 4w \\ 2m \end{pmatrix}$：為 28 日-59 日之死亡數
6. $D\begin{pmatrix} 2m \\ 3m \end{pmatrix}$：為 60 日-89 日之死亡數
7. $D\begin{pmatrix} 3m \\ 6m \end{pmatrix}$：為 90 日-179 日之死亡數
8. $D\begin{pmatrix} 6m \\ 12m \end{pmatrix}$：為 180 日-364 日之死亡數

（二）未滿一歲生存機率之計算公式：

民國 107 年 12 月 25 日至民國 110 年 12 月 24 日四年間之出生數以 $B\begin{pmatrix} 107.12.25 \\ 110.12.24 \end{pmatrix}$表示之；民國 108 年 1 月至 110 年 12 月出生數則以$B\begin{pmatrix} 108.1 \\ 110.12 \end{pmatrix}$表示之；其餘類推，其他出生數用同樣方法表示之。故各週齡、月齡之生存機率可由下列各式求得：

$$_{w}p_{0} = 1 - \frac{D\binom{0}{w}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{107.12.26}{110.12.25} + B\binom{108.1}{110.12}\right]} \qquad (1)$$

$$ {}_{2w}p_0 = {}_{w}p_0 - \frac{D\binom{w}{2w}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{107.12.19}{110.12.18}+B\binom{107.12.25}{110.12.24}\right]} \quad (2) $$

$$ {}_{3w}p_0 = {}_{2w}p_0 - \frac{D\binom{2w}{3w}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{107.12.12}{110.12.11}+B\binom{107.12.18}{110.12.17}\right]} \quad (3) $$

$$ {}_{4w}p_0 = {}_{3w}p_0 - \frac{D\binom{3w}{4w}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{107.12.5}{110.12.4}+B\binom{107.12.11}{110.12.10}\right]} \quad (4) $$

$$ {}_{2m}p_0 = {}_{4w}p_0 - \frac{D\binom{4w}{2m}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{107.11}{110.10}+B\binom{107.12.4}{110.12.3}\right]} \quad (5) $$

$$ {}_{3m}p_0 = {}_{2m}p_0 - \frac{D\binom{2m}{3m}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{107.10}{110.9}+B\binom{107.11}{110.10}\right]} \quad (6) $$

$$ {}_{6m}p_0 = {}_{3m}p_0 - \frac{D\binom{3m}{6m}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{107.7}{110.6}+B\binom{107.10}{110.9}\right]} \quad (7) $$

$$ {}_{12m}p_0 = {}_{6m}p_0 - \frac{D\binom{6m}{12m}}{\frac{1}{2}\left[B\binom{107.1}{109.12}+B\binom{107.7}{110.6}\right]} \quad (8) $$

（三）出生數之推計公式：

上列之各式中之$B\binom{107.12.26}{110.12.25}$，$B\binom{107.12.19}{110.12.18}$，$B\binom{107.12.12}{110.12.11}$，$B\binom{107.12.5}{110.12.4}$等出生數無法獲得實際數字，故由下式推計之

$$ B\binom{107.12.26}{110.12.25} = B\binom{108.1}{110.12} + \frac{6}{31}[B(107.12) - B(110.12)] \quad (9) $$

$$ B\binom{107.12.19}{110.12.18} = B\binom{108.1}{110.12} + \frac{13}{31}[B(107.12) - B(110.12)] \quad (10) $$

$$ B\binom{107.12.12}{110.12.11} = B\binom{108.1}{110.12} + \frac{20}{31}[B(107.12) - B(110.12)] \quad (11) $$

$$ B\binom{107.12.5}{110.12.4} = B\binom{108.1}{110.12} + \frac{27}{31}[B(107.12) - B(110.12)] \quad (12) $$

上列各式中$B(107.12)$及$B(110.12)$各表示民國 107 年 12 月及 110 年 12 月之出生嬰兒數。

（四）未滿一歲死亡機率之計算公式：

將（9）~（12）式代入（1）~（5）式，求得下列（13）~（17）各式：

$$ {}_{w}p_0 = 1 - \frac{D\binom{0}{w}}{B\binom{108.1}{110.12} + \frac{6}{62}[B(107.12) - B(110.12)]} \quad (13) $$

$$ {}_{2w}p_0 = {}_{w}p_0 - \frac{D\binom{w}{2w}}{B\binom{108.1}{110.12} + \frac{19}{62}[B(107.12) - B(110.12)]} \quad (14) $$

$$ {}_{3w}p_0 = {}_{2w}p_0 - \frac{D\binom{2w}{3w}}{B\binom{108.1}{110.12} + \frac{33}{62}[B(107.12) - B(110.12)]} \quad (15) $$

$$ {}_{4w}p_0 = {}_{3w}p_0 - \frac{D\binom{3w}{4w}}{B\binom{108.1}{110.12} + \frac{47}{62}[B(107.12) - B(110.12)]} \quad (16) $$

$$ {}_{2m}p_0 = {}_{4w}p_0 - \frac{D\binom{4w}{2m}}{B\binom{108.1}{110.12} + \frac{1}{2}[B(107.12) - B(110.12)] + \frac{58}{62}[B(107.12) - B(110.12)]} \quad (17) $$

由上列（13）~（17）及（6）~（8）各計算公式，可求得各週齡、月齡之生存機率及死亡機率之計算公式如下：

$$ {}_{w}p_o = {}_{w}p_o \quad (18) \qquad {}_{w}q_0 = 1 - {}_{w}p_o \quad (26) $$

$$ {}_{w}p_w = \frac{{}_{2w}p_o}{{}_{w}p_o} \quad (19) \qquad {}_{w}q_w = 1 - {}_{w}p_w \quad (27) $$

$$ {}_{w}p_{2w} = \frac{{}_{3w}p_o}{{}_{2w}p_o} \quad (20) \qquad {}_{w}q_{2w} = 1 - {}_{w}p_{2w} \quad (28) $$

$$ {}_{w}p_{3w} = \frac{{}_{4w}p_o}{{}_{3w}p_o} \quad (21) \qquad {}_{w}q_{3w} = 1 - {}_{w}p_{3w} \quad (29) $$

$$ {}_{m}p_{4w} = \frac{{}_{2m}p_o}{{}_{4w}p_o} \quad (22) \qquad {}_{m}q_{4w} = 1 - {}_{m}p_{4w} \quad (30) $$

$$ {}_{m}p_{2m} = \frac{{}_{3m}p_o}{{}_{2m}p_o} \quad (23) \qquad {}_{m}q_{2m} = 1 - {}_{m}p_{2m} \quad (31) $$

$$ {}_{3m}p_{3m} = \frac{{}_{6m}p_o}{{}_{3m}p_o} \quad (24) \qquad {}_{3m}q_{3m} = 1 - {}_{3m}p_{3m} \quad (32) $$

$$ {}_{6m}p_{6m} = \frac{{}_{12m}p_o}{{}_{6m}p_o} \quad (25) \qquad {}_{6m}q_{6m} = 1 - {}_{6m}p_{6m} \quad (33) $$

二、一歲以上中央死亡率 m_x 及未補整死亡機率 $q_x^{'}$ 之計算：

（一）基礎人口資料：

1.基礎人口數（P_x）：

本次國民生命表之基礎人口，係採民國 99 年年底人口數，而此人口數係按民國 99 年年底戶口及住宅普查按性別及年齡別分之人口數。

2.基礎死亡數之計算公式：

$$D_x = D_x^{98} + D_x^{99} + D_x^{100} \qquad (34)$$

其中 D_x^{98}：為 98 年 x 歲之死亡數

D_x^{99}：為 99 年 x 歲之死亡數

D_x^{100}：為 100 年 x 歲之死亡數

（二）中央死亡率 m_x 之計算公式：

$$m_x = \frac{D_x}{3P_x} \qquad (35)$$

其中 D_x：為 x 歲之死亡數

P_x：為 x 歲之人口數

（三）未補整死亡機率 $q_x^{'}$ 之計算公式：

$$q_x^{'} = \frac{m_x}{1+\frac{1}{2}m_x+\frac{1}{12}\left\{m_x^2+\frac{1}{2}(m_{x-1}-m_{x+1})\right\}}(x=2,3,4......) \qquad (36)$$

$$q_1^{'} = \frac{m_1}{1+\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{12}m_1\left\{m_1+\ln\frac{m_2}{m_1}\right\}} \qquad (37)$$

其餘各年齡之未補整死亡機率 $q_2^{'}$，$q_3^{'}\ldots$，可由第（36）式類推而得。

（四）按兩性及男、女分別彙編中央死亡率及未補整死亡機率表。

（五）繪圖觀察及分析

三、未補整死亡機率之補整：

（一）死亡機率易受偶然波動之影響，所獲得的未補整死亡機率波動頗大，故採用 Whittaker 修勻法予以補整，Whittaker 修勻法一般公式為：

$$q_x = (W + ht(k_z)k_z)^{-1} W q_x^{'} \qquad (38)$$

其中 $q_x^{'}$ 為未補整後死亡機率

q_x 為補整後死亡機率

$t(k_z)$ 表示 k_z 的轉秩

$[K_z]_{i,j} = \binom{Z}{j-1}(-1)^{Z-j+1}$ $\quad \begin{cases} \text{i=1,2,...,(n-z)} \\ j=1,2,...,z+1 \end{cases}$,n 為未補整死亡機率 $q_x^{'}$ 的觀測年齡數。

Whittaker 修勻法中，採用之參數如下：

1.加權數矩陣 W ：加權數 w_i ＝各年齡於民國 109 年年底之單一人口數

2.平滑性函數 $z=3$

3.適度性與平滑性的比重：h=平均各年齡人口數（1 歲至 98 歲人口總和的平均數）

將各個參數值帶入（38）式，即得 Whittaker 修勻法之補整後死亡機率。高齡死亡機率亦採用 Whittaker 修勻法補整後之修勻值。

（二）按兩性平均及男、女分別彙編中央死亡率及補整後死亡機率表。

（三）繪圖觀察及分析

四、高齡死亡機率之推算：

（一）當死亡機率波動不大時：採 Whittaker 修勻法推算之。

（二）當死亡機率波動甚大時：採 Whittaker 修勻法與高馬氏（Gompertz-Makeham）加權迴歸（WLS）之線性組合推算之。

1.高馬氏加權迴歸（WLS）

在 Gompertz 假設（ $\mu_x = Bc^x$ ）下，我們有

$$\ln(-\ln(p_x)) = \alpha + \beta x \qquad (39)$$

可由迴歸方法估計死亡率；也就是在

$$\min_{\alpha,\beta} \sum_x w_x (\ln(-\ln p_x) - \alpha - \beta x)^2 \qquad (40)$$

最小化的原則下求得死亡機率估計值。一般迴歸的權數 $w_x = 1$，加權迴歸的權數 w_x 為各年齡層的總人口數。

若以矩陣表示，則加權迴歸的參數估計值為

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = (t(A)WA)^{-1} t(A)W \ln(-\ln(p_x^{'})) \qquad (41)$$

其中，$p_x^{'} = 1 - q_x^{'}$（$x = 50, 51, ..., 98$）為未補整生存機率（$q_x^{'}$ 同（36）式）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 51 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 98 \end{pmatrix}, \qquad \underset{i=1,2,...,49}{[W]_{i.i}} = \text{民國 99 年年底} 49+i \text{歲之總人口數}$$

將（41）式所得之$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$代回（39）式，即可得加權迴歸法補整後之 p_x。

補整後之死亡機率 q_x 由 $q_x = 1 - p_x$ 即可得知。

2.Whittaker 修勻法與高馬氏加權迴歸（WLS）之線性組合

60 至 86 歲採 Whittaker 修勻法與 WLS 之線性組合推算高齡死亡機率，86 歲以後則採 WLS 為補整後之死亡機率，意即：

$$q_{59+i} = (1 - (\frac{i-1}{26}))q_{59+i}^{(Whittaker)} + (\frac{i-1}{26})q_{59+i}^{(W.L.S)} \qquad i = 1, 2, ..., 27 \qquad (42)$$

$$q_{87+i} = q_{87+i}^{(W.L.S)} \qquad i = 0, 1, ..., 12 \qquad (43)$$

五、國民生命表其他諸函數之計算：

（一）生存數及死亡數之計算：

1.一歲以下生存數及死亡數之計算：

設一定出生人數，通常基數定為 100,000 人，依據前節所求得之生存機率 ${}_t p_x$（x, t 代表各週齡及月齡時間，即在 x 時點的人口數到 $x+t$ 時點尚可生存之機率），計算生存數 l_x 及死亡數 ${}_t d_x$ 如下：

$$l_w = l_0 \cdot {}_w p_0 \qquad (44)$$

$$l_{2w} = l_0 \cdot {}_{2w} p_0 = l_w \cdot {}_w p_w \qquad (45)$$

$$l_{3w} = l_0 \cdot {}_{3w} p_0 = l_{2w} \cdot {}_w p_{2w} \qquad (46)$$

$$l_{4w} = l_0 \cdot {}_{4w}p_0 = l_{3w} \cdot {}_{w}p_{3w} \tag{47}$$

$$l_{2m} = l_0 \cdot {}_{2m}p_0 = l_{4w} \cdot {}_{m}p_{4w} \tag{48}$$

$$l_{3m} = l_0 \cdot {}_{3m}p_0 = l_{2m} \cdot {}_{m}p_{2m} \tag{49}$$

$$l_{6m} = l_0 \cdot {}_{6m}p_0 = l_{3m} \cdot {}_{3m}p_{3m} \tag{50}$$

$$l_1 = l_0 \cdot p_0 = l_{6m} \cdot {}_{6m}p_{6m} \tag{51}$$

$$_{w}d_0 = l_0 - l_w = l_0 \cdot \left(1 - {}_{w}p_0\right) \tag{52}$$

$$_{w}d_w = l_w - l_{2w} = l_w \cdot \left(1 - {}_{w}p_w\right) \tag{53}$$

$$_{w}d_{2w} = l_{2w} - l_{3w} = l_{2w} \cdot \left(1 - {}_{w}p_{2w}\right) \tag{54}$$

$$_{w}d_{3w} = l_{3w} - l_{4w} = l_{3w} \cdot \left(1 - {}_{w}p_{3w}\right) \tag{55}$$

$$_{m}d_{w4} = l_{4w} - l_{2m} = l_{4w} \cdot \left(1 - {}_{m}p_{4w}\right) \tag{56}$$

$$_{m}d_{2m} = l_{2m} - l_{3m} = l_{2m} \cdot \left(1 - {}_{m}p_{2m}\right) \tag{57}$$

$$_{3m}d_{3m} = l_{3m} - l_{6m} = l_{3m} \cdot \left(1 - {}_{3m}p_{3m}\right) \tag{58}$$

$$_{6m}d_{6m} = l_{6m} - l_1 = l_{6m} \cdot \left(1 - {}_{6m}p_{6m}\right) \tag{59}$$

$$d_0 = l_0 - l_1 = l_0 \cdot \left(1 - p_0\right) \tag{60}$$

2.一歲以上生存數及死亡數之計算：

$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x \qquad (x \geq 1) \tag{61}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x \cdot (1 - p_x) \tag{62}$$

（二）定常人口L_x、T_x及平均餘命$\overset{\circ}{e}_x$之計算：

假設各年齡間（x 至 x+1 歲）之死亡機率均勻分散：

1.依據定常人口L_x之定義，可以下式表示：

$$_{n}L_x = \int_x^{x+n} l_t \, dt \tag{63}$$

在 UDD 假設下，其計算式為：$L_x \approx \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$ （64）

$$2. T_x = \int_x^{\infty} l_t \, dt = \sum_{t=x}^{\infty} L_t \tag{65}$$

其中最高年齡的定常人口T_x也代入(65)式，L_t亦採 UDD 假設，最高年齡以上的生存數l_t以外插方式求得。第十一次國民生命表的最高年齡為 100 歲，建議作法

為代入 90 歲以上的生存數，以簡單迴歸估計 100 歲以上的生存數，得出的 T_{100} 估計值大約等於 $0.75 \times l_{100}$。

3. $$\mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x} \qquad (66)$$

參、特定死因除外國民生命表函數定義

一、基礎資料

（一）死亡數：民國 108 年至民國 110 年死亡人數按兩性、男性、女性及年齡別分；基礎死亡數資料為：（參閱公式（34））

$$D_x = D_x^{108} + D_x^{109} + D_x^{110}$$

（二）十大死亡原因別死亡數（依民國 64 年國際簡略死因分類號碼為準）：
分別依兩性、男性、女性及年齡別分之前十大死亡原因別死亡數。
設民國 108 年至 110 年第 i 項死亡原因 x 歲死亡數分別為 ${}_{108}D_x^{(i)}$、${}_{109}D_x^{(i)}$ 及 ${}_{110}D_x^{(i)}$，故第 i 項死亡原因之基礎死亡數為

$$D_x^{(i)} = {}_{108}D_x^{(i)} + {}_{109}D_x^{(i)} + {}_{110}D_x^{(i)} \qquad （67）$$

二、特定死因除外未補整死亡機率 $q_x^{'(-i)}$ 之計算：

根據公式（36）之未補整死亡機率 $q_x^{'}$ 計算第 i 項死因除外未補整死亡機率 $q_x^{'(-i)}$，假設各年齡間之死亡分布為均勻分配，$f_T(t)=q_x$，$t \in (0,1)$，其計算公式如下：

$$q_x^{'(-i)} = q_x\left(\frac{D_x - D_x^{(i)}}{D_x}\right) \qquad （68）$$

三、特定死因除外死亡機率 $q_x^{'(-i)}$ 之補整與高齡死亡機率之推算：

依據前項特定死因除外未補整死亡機率 $q_x^{'(-i)}$ 計算結果，沿用 Whittaker 修勻法補整；對於高齡波動較大的補整死亡機率，則採 Whittaker 修勻法與高馬氏加權迴歸（WLS）之線性組合加以推算補整。

四、特定死因除外生命表其他諸函數之計算：

假設第 i 項死因除外補整後之死亡機率為 $q_x^{(-i)}$，$p_x^{(-i)} = 1 - q_x^{(-i)}$。

（一）生存數 $l_x^{(-i)}$ 及死亡數 $d_x^{(-i)}$ 之計算：

$$l_{x+1}^{(-i)} = l_x^{(-i)} \cdot p_x^{(-i)} \qquad （69）$$

$$d_x^{(-i)} = l_x^{(-i)} - l_{x+1}^{(-i)} \qquad （70）$$

（二）定常人口 $L_x^{(-i)}$、$T_x^{(-i)}$ 及平均餘命 $\mathring{e}_x^{(-i)}$ 之計算：

假設各年齡間（x 至 x+1 歲）之死亡機率均勻分散：

$$L_x^{(-i)} \approx \frac{1}{2}(l_x^{(-i)} + l_{x+1}^{(-i)}) \qquad (71)$$

$$T_x^{(-i)} = \sum_{t=x}^{\infty} L_t^{(-i)} \qquad (72)$$

$$\mathring{e}_x^{(-i)} = \frac{T_x^{(-i)}}{l_x^{(-i)}} \qquad (73)$$

肆、特定死因除外國民生命表之編算方法

特定死因死亡率、生存機率等生命表數值之編算，與上述貳項之步驟及公式相同，在此不再贅述。