簡易生命表函數定義及編算方法

一、簡易生命表函數之定義

生命表係將特定範圍之全體人口，就其死亡因年齡而異所產生之狀況，以各種函數表示之統計表。生命表各種函數之意義如下：

（一）生存機率（Probability of Surviving）：

$_np_x$：已達某年齡（x 歲）者，其到達 x+n 歲時仍生存之機率。單一年齡生存機率（n=1）則以 p_x 表示。

（二）死亡機率(Probability of Death)：

$_nq_x$：x 歲者達到 x+n 歲前可能遭受死亡之機率。若 n=1，則以 q_x 表示。

（三）生存數(Number of Survivors)：

l_x：一定之出生人數〔通常基數(l_0)定為 100,000 人〕，其到達某年齡（x 歲）時尚生存的人數。

（四）死亡數(Numbers of Death)：

$_nd_x$：x 歲時之生存數在達到 x+n 歲前之死亡人數。若 n=1，則以 d_x 表示。

（五）定常人口(Stationary Population)：

假設死亡秩序不變，經過一段時間其人口之年齡結構並未因此而有所變動，此種狀態之人口稱為「定常人口」。

$_nL_x$：為 x 歲至 x+n 歲年齡組距間之定常人口數。

$$_nL_x = \int_x^{x+n} l_t dt$$

在 UDD(Uniform distribution of death；均勻死亡)假設下，其計算式為：

$$L_x \approx \frac{1}{2}\left(l_x + l_{x+1}\right)$$

T_x：為由 x 歲至所有以後各歲之定常人口總數。其計算式為：

$$T_x = \int_x^{\infty} l_t dt = \sum_{t=x}^{\infty} L_t$$

（六）平均餘命(Life Expectancy):

假設一出生嬰兒遭受到某一時期之每一年齡組所經驗之死亡風險後，

他們所能存活的預期壽命，亦即達到 x 歲以後平均尚可期待生存之年數，稱為 x 歲之平均餘命。

$\overset{\circ}{e}_x$ ：年滿 x 歲者平均尚可期望生存之年數，故又稱為「預期壽命」。

其計算式為：$\overset{\circ}{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$

二、簡易生命表之編算方法

（一）基礎資料：

1. 基礎人口：戶籍統計之年中人口按下列年齡分組：

（1）1、2、3、4 歲為單一年齡組。

（2）5 歲以上至 84 歲為五歲組。

（3）85 歲以上者合併為一組。

2. 死亡數：死亡數(按發生日期登記)按下列月、年齡分組。

（1）零歲死亡人口分為零個月、一個月、二個月、三個月及六個月之月別死亡數。

（2）1、2、3、4 歲為單一年齡死亡數。

（3）5 歲以上至 84 歲為五歲組死亡數。

（4）85 歲以上者合併為一組。

3. 出生數：當年及前一年按發生日期登記之月別出生數。

（二）死亡機率之計算：

1. 未滿 1 歲死亡機率之分組：

按月齡計算，即按未滿一個月；一個月以上未滿二個月；二個月以上未滿三個月；三個月以上未滿六個月及六個月以上未滿 1 歲等五項計算。

2. 零歲死亡機率之計算公式：

上述區間之死亡數各為 D(0m,1m)，D(1m,2m)，D(2m,3m)，D(3m,6m)，D(6m,12m)；以 B(y,m)表民國 y 年 m 月 1 日以後一年間之出生數。各月齡別生存機率及死亡機率之計算公式如下：

$_{1m}p_0 = 1 - D(0m,1m) / \{[B(y-1,12) + B(y,1)] / 2\}$

$_{2m}p_0 = {}_{1m}p_0 - D(1m,2m) / \{[B(y-1,11) + B(y-1,12)] / 2\}$

$_{3m}p_0 = {}_{2m}p_0 - D(2m,3m) / \{[B(y-1,10) + B(y-1,11)] / 2\}$

$_{6m}p_0 = {}_{3m}p_0 - D(3m,6m) / \{[B(y-1,7) + B(y-1,10)] / 2\}$

$_{12m}p_0 = {}_{6m}p_0 - D(6m,12m) / \{[B(y-1,1) + B(y-1,7)] / 2\}$

由以上各式求得 $_np_0$ 後，則各月齡之死亡機率 $_{1m}q_0$，$_{1m}q_{1m}$，$_{1m}q_{2m}$，$_{3m}q_{3m}$，$_{6m}q_{6m}$ 之計算，可由以下各項公式求之：

$_{1m}q_0 = 1 - {}_{1m}p_0$

$_{1m}q_{1m} = 1 - {}_{2m}p_0 / {}_{1m}p_0$

$_{1m}q_{2m} = 1 - {}_{3m}p_0 / {}_{2m}p_0$

$_{3m}q_{3m} = 1 - {}_{6m}p_0 / {}_{3m}p_0$

$_{6m}q_{6m} = 1 - {}_{12m}p_0 / {}_{6m}p_0$

3.1 歲以上死亡機率之計算：

（1）1 歲至 79 歲中央死亡率之計算：

設民國 y 年之 x 歲一年間之死亡數及 x 歲以上未滿 x+5 歲一年間之死亡數分別為 D_x 及 $_5D_x$，x 歲之年中人口數為 P_x，則其中央死亡率 m_x 及 $_5m_x$ 可以下式求得：

$m_x = D_x / P_x$　　　　x＝1, 2, 3, 4

$_5m_x = {}_5D_x / [P_x + P_{x+1} + P_{x+2} + P_{x+3} + P_{x+4}]$　　　　x＝5,10,15,....,75

（2）80 歲至未滿 90 歲中央死亡率 $_5m_{80}$、$_5m_{85}$ 之計算：

$_5m_x = BC^x$

設 $_5m_{85} / {}_5m_{80} = {}_5m_{80} / {}_5m_{75} = {}_5m_{75} / {}_5m_{70} = C^5$

$_5m_{80} = ({}_5m_{75})^2 / {}_5m_{70}$

$_5m_{85} = ({}_5m_{80})^2 / {}_5m_{75}$

$_\infty m_{85} = {}_\infty D_{85} / \{{}_\infty P_{85} - [{}_5D_{80} / (20 \cdot {}_5m_{80})]\}$

（3）未補整死亡機率之計算：

以上述方法求得之中央死亡率 m_x ，$_5m_x$ 為根據，再以下列各式求得未補整死亡機率 q_x ，$_5q_x$

（a）1 至 4 歲單齡死亡機率之計算如下：

$q_x = m_x/(1+m_x/2)$ ， x＝1, 2, 3, 4

（b）5 歲以上未滿 10 歲之年齡組之死亡機率 $_5q_5$ 由下式求得之：

$$_5q_5 = {}_5m_5 / \left\{ \frac{1}{5} + (\frac{1}{2})_5m_5 + \Gamma \right\}$$

$$\Gamma = 5 \times {}_5m_5 \left[{}_5m_5 - l_n({}_5m_{10}/{}_5m_5)/5 \right]/12$$

（c）10 歲以上未滿 85 歲之年齡組之死亡機率 $_5q_x$ 由下式求得之：

$$_5q_x = {}_5m_x / (\frac{1}{5} + \frac{_5m_x}{2} + \Phi) \quad , x=10, 15, 20, \cdots\cdots, 80$$

$$\Phi = 5 \times \left[{}_5m_x^2 + ({}_5m_{x-5} - {}_5m_{x+5})/10 \right]/12$$

（d）依據定義 85 歲以上之死亡機率為 1，即 $_\infty q_{85}= 1$

（三）5 歲以上之各單一年齡死亡機率之插補：

1. 單一年齡死亡機率之插補公式：

5 歲以上各單一年齡死亡機率 q_x 係將以前項所得五歲組死亡機率 $_5q_x$ 由下列插補法求之。假設自 x－10 歲至 x+15 歲範圍內之死力 μ_x 以 4 次多項式" $\mu_x = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ "表示，則自 5 歲至 84 歲之單一年齡死亡機率 q_x ，可用下列插補公式計算。

依據死力" μ_x "之定義：

$$\mu_x = -(\frac{1}{l_x})(\frac{dl_x}{d_x})$$

$$\int_x^{x+5} \mu_t d_t = -l_n(1 - {}_5q_x)$$

$$\int_x^{x+1} \mu_t d_t = -l_n(1 - q_x)$$

上列各式均為 4 次多項式，而－ $l_n(1-{}_5q_x)$，－ $l_n(1-q_x)$ 各以 ${}_5\psi_x$，ψ_x 表示。

求 μ_x 在積分範圍 x 至 x+5 之積分函數如下：

$${}_5\psi_x=\int_x^{x+5}\mu_t d_t=[ax^5/5+bx^4/4+cx^3/3+dx^2/2+ex]_x^{x+5}$$

假設該方程式通過五點為(x－10, ${}_5\psi_{x-10}$)，(x－5, ${}_5\psi_{x-5}$)，(x, ${}_5\psi_x$)，(x+5, ${}_5\psi_{x+5}$)，(x+10, ${}_5\psi_{x+10}$)，此五點之積分範圍各為(－10, －5)，(－5, 0)，(0, 5)，(5, 10)，(10, 15)則可得 ${}_5\psi_{x-10}$，${}_5\psi_{x-5}$，${}_5\psi_x$，${}_5\psi_{x+5}$，${}_5\psi_{x+10}$ 之方程式，求解此等方程式可得 a、b、c、d、e 之係數。所求者係 ψ_x，其積分函數如下：

$$\psi_x=\int_x^{x+1}\mu_t d_t=[ax^5/5+bx^4/4+cx^3/3+dx^2/2+ex]_x^{x+1}$$

2. 15 歲至 74 歲各歲別 ψ_x 之計算：

上式內代入 a、b、c、d、e 則得第一插補公式如下：

ψ_x=(-126 ${}_5\psi_{x-10}$+1029 ${}_5\psi_{x-5}$+2794 ${}_5\psi_x$－671 ${}_5\psi_{x+5}$+99 ${}_5\psi_{x+10}$)/15625
ψ_{x+1}=(-56 ${}_5\psi_{x-10}$+349 ${}_5\psi_{x-5}$+3289 ${}_5\psi_x$－526 ${}_5\psi_{x+5}$+69 ${}_5\psi_{x+10}$)/15625
ψ_{x+2}=(14 ${}_5\psi_{x-10}$－181 ${}_5\psi_{x-5}$+3459 ${}_5\psi_x$－181 ${}_5\psi_{x+5}$+14 ${}_5\psi_{x+10}$)/15625
ψ_{x+3}=(69 ${}_5\psi_{x-10}$－526 ${}_5\psi_{x-5}$+3289 ${}_5\psi_x$+349 ${}_5\psi_{x+5}$－56 ${}_5\psi_{x+10}$)/15625
ψ_{x+4}=(99 ${}_5\psi_{x-10}$－671 ${}_5\psi_{x-5}$+2794 ${}_5\psi_x$+1029 ${}_5\psi_{x+5}$－126 ${}_5\psi_{x+10}$)/15625

x =15, 20, 25, …, 70

3. 5 歲至 14 歲各歲別 ψ_x 之計算：

關於自 5 歲至 14 歲各歲別死亡機率之計算，將死力 μ_x 之積分範圍各為 (4,5)、(5,10)、(10,15)、(15,20)、(20,25)予以積分求得積分函數值各為 ψ_4，${}_5\psi_5$，${}_5\psi_{10}$，${}_5\psi_{15}$，${}_5\psi_{20}$ 等五個方程式解之求得係數 a、b、c、d、e 值。將此係數代入方程式 ψ_5，ψ_6，…，ψ_{14} 式內，即得第二插補公式如下：

ψ_5=(249375 ψ_4+89523 ${}_5\psi_5$－33369 ${}_5\psi_{10}$+11319 ${}_5\psi_{15}$－1848 ${}_5\psi_{20}$)/577500
ψ_6=(43125 ψ_4+131829 ${}_5\psi_5$－33567 ${}_5\psi_{10}$+10197 ${}_5\psi_{15}$－1584 ${}_5\psi_{20}$)/577500
ψ_7=(-69375 ψ_4+139449 ${}_5\psi_5$－12087 ${}_5\psi_{10}$+2277 ${}_5\psi_{15}$－264 ${}_5\psi_{20}$)/577500
ψ_8=(-113125 ψ_4+123419 ${}_5\psi_5$+21163 ${}_5\psi_{10}$－7733 ${}_5\psi_{15}$+1276 ${}_5\psi_{20}$)/577500
ψ_9=(-110000 ψ_4+93280 ${}_5\psi_5$+57860 ${}_5\psi_{10}$－16060 ${}_5\psi_{15}$+2420 ${}_5\psi_{20}$)/577500

ψ_{10}=(-78750ψ_4+57078${}_5\psi_5$+91266${}_5\psi_{10}$－19866${}_5\psi_{15}$+2772${}_5\psi_{20}$)/577500
ψ_{11}=(-35000ψ_4+21364${}_5\psi_5$+116228${}_5\psi_{10}$－17248${}_5\psi_{15}$+2156${}_5\psi_{20}$)/577500
ψ_{12}=(8750ψ_4－8806${}_5\psi_5$+129178${}_5\psi_{10}$－7238${}_5\psi_{15}$+616${}_5\psi_{20}$)/577500
ψ_{13}=(43125ψ_4－29871${}_5\psi_5$+128133${}_5\psi_{10}$+10197${}_5\psi_{15}$－1584${}_5\psi_{20}$)/577500
ψ_{14}=(61875ψ_4－39765${}_5\psi_5$+112695${}_5\psi_{10}$+34155${}_5\psi_{15}$－3960${}_5\psi_{20}$)/577500

4. 由各歲別ψ_x計算死亡機率q_x之關係式：

q_x=1－l_n^{-1}（－ψ_x）=1－exp(－ψ_x)

5. 75歲至84歲之死亡機率q_x之計算：

將死力"μ_x"以高馬(Gompertz-Makeham)之法則表示，則

μ_x=A+BC^x

由此C^5=(${}_5\psi_{75}$－${}_5\psi_{80}$)/(${}_5\psi_{70}$－${}_5\psi_{75}$)

ψ_x=[(C－1)/(C^5－1)^2]C^{x-75}(${}_5\psi_{80}$－${}_5\psi_{75}$)+Θ/5

Θ=${}_5\psi_{75}$－(${}_5\psi_{80}$－${}_5\psi_{75}$)/(C^5－1)

由此式求得75歲至84歲之ψ_x，而計算死亡機率，其關係式同上。

（四）1歲以上各死亡機率之補整：

以上所求得之1至4歲死亡機率及5至84歲死亡機率仍有波動，故死亡機率須再以Greville三次九項公式加以補整。

5至79歲死亡機率係以Greville三次九項公式補整，而1至4歲及80至83歲用下式補整，式中$q_x^{'}$為未補整死亡機率，q_x為補整死亡機率。

1. q_1=(9449$q_1^{'}$+9800$q_2^{'}$+980$q_3^{'}$－5880$q_4^{'}$－4410$q_5^{'}$+1512$q_6^{'}$+4060$q_7^{'}$+1000$q_8^{'}$－1925$q_9^{'}$)/14586
2. q_2=(13475$q_1^{'}$+23096$q_2^{'}$+20090$q_3^{'}$+8820$q_4^{'}$－1470$q_5^{'}$－5040$q_6^{'}$－2702$q_7^{'}$+700$q_8^{'}$+1375$q_9^{'}$)/58344
3. q_3=(385$q_1^{'}$+5740$q_2^{'}$+11464$q_3^{'}$+11340$q_4^{'}$+5040$q_5^{'}$－1860$q_6^{'}$－3760$q_7^{'}$－772$q_8^{'}$+1595$q_9^{'}$)/29172
4. q_4=(－1155$q_1^{'}$+1260$q_2^{'}$+5670$q_3^{'}$+7736$q_4^{'}$+5670$q_5^{'}$+1620$q_6^{'}$－930$q_7^{'}$－720$q_8^{'}$+297$q_9^{'}$)/19448
5. q_{80}=(－1155$q_{83}^{'}$+1260$q_{82}^{'}$+5670$q_{81}^{'}$+7736$q_{80}^{'}$+5670$q_{79}^{'}$+1620$q_{78}^{'}$－930$q_{77}^{'}$

$-720q'_{76}+297q'_{75})/19448$

6. $q_{81}=(385q'_{83}+5740q'_{82}+11464q'_{81}+11340q'_{80}+5040q'_{79}-1860q'_{78}-3760q'_{77}-772q'_{76}+1595q'_{75})/29172$

7. $q_{82}=(13475q'_{83}+23096q'_{82}+20090q'_{81}+8820q'_{80}-1470q'_{79}-5040q'_{78}-2702q'_{77}+700q'_{76}+1375q'_{75})/58344$

8. $q_{83}=(9449q'_{83}+9800q'_{82}+980q'_{81}-5880q'_{80}-4410q'_{79}+1512q'_{78}+4060q'_{77}+1000q'_{76}-1925q'_{75})/14586$

9. 一般項即 5 至 79 歲之補整式為：

$q_x=(-99q'_{x-4}-24q'_{x-3}+288q'_{x-2}+648q'_{x-1}+805q'_{x}+648q'_{x+1}+288q'_{x+2}-24q'_{x+3}-99q'_{x+4})/2431$ $\qquad x=5,6,\cdots,79$

（五）高齡死亡機率之推算：

1. 當死亡機率波動不大時：採 Greville 修勻法推算之。
2. 當死亡機率波動甚大時：採 Greville 修勻法與高馬氏（Gompertz-Makeham）加權迴歸（WLS）之線性組合推算之。

（1）高馬氏加權迴歸（WLS）

在 Gompertz 假設（ $\mu_x=Bc^x$ ）下，我們有

$$\ln(-\ln(p_x))=\alpha+\beta x \qquad (1)$$

可由迴歸方法估計死亡率；也就是在

$$\min_{\alpha,\beta}\sum_x w_x(\ln(-\ln p_x)-\alpha-\beta x)^2 \qquad (2)$$

最小化的原則下求得死亡機率估計值。一般迴歸的權數 $w_x=1$，加權迴歸的權數 w_x 為各年齡層的總人口數。

若以矩陣表示，則加權迴歸的參數估計值為

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix}=(t(A)WA)^{-1}t(A)W\ln(-\ln(p_x')) \qquad (3)$$

其中，$p_x'=1-q_x'$（ $x=60,61,\cdots,84$ ）為未補整生存機率

$$A=\begin{pmatrix}1 & 60\\ 1 & 61\\ \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ 1 & 84\end{pmatrix}\quad,\quad \underset{i=1,2,\cdots,25}{[W]_{ii}}=\text{編算年}59+i\text{歲年中人口數}$$

將（3）式所得之$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix}$帶回（1）式，即可得加權迴歸法補整後之 p_x 。

補整後之死亡機率 q_x 由 $q_x=1-p_x$ 即可得知。

（2）Greville 修勻法與高馬氏加權迴歸（WLS）之線性組合

60 至 76 歲採 Greville 修勻法與 WLS 之線性組合推算高齡死亡機率，76 歲以後則採 WLS 為補整後之死亡機率，意即：

$$q_{59+i}=(1-(\frac{i-1}{16}))q_{59+i}^{(Greville)}+(\frac{i-1}{16})q_{59+i}^{(WLS)}\qquad i=1,2,\cdots,17$$

$$q_{77+i}=q_{77+i}^{(WLS)}\qquad i=0,1,\cdots,7$$

（六）生存數"l_x"、死亡數"d_x"之計算：

1.未滿 1 歲月齡 l_x 及 d_x 之計算：

根據前已求得各月齡生存機率 ${}_{1m}p_0$ 值，再求 l_x 、d_x 值，即：

l_0=100000
l_{1m}=100000・${}_{1m}p_0$
l_{2m}=100000・${}_{2m}p_0$
…………………
$d_{1m}=l_{1m}-l_{2m}$
$d_{2m}=l_{2m}-l_{3m}$
…………………

2.1 歲以上之生存數"l_x"及死亡數"d_x"之計算：

$l_x=l_{x-1}(1-q_{x-1})$
$d_x=l_x-l_{x+1}$
由上式，逐次求得"l_x"及"d_x"，即

$l_1 = l_0\,(1-q_0)$
$l_2 = l_1\,(1-q_1)$
…………………
$l_{85} = l_{84}\,(1-q_{84})$
$d_0 = l_0 - l_1$
$d_1 = l_1 - l_2$
…………………
${}_{\infty}d_{85} = l_{85}$

（七）定常人口"L_x"、"T_x"及平均餘命"$\mathring{e}_x$"之計算：

1. 未滿 1 歲之定常人口 L_x 之月齡區間為 h，即由下式求之：

$${}_hL_x = h(l_x + l_{x+h})/2$$

2. 1 歲以上之定常人口"L_x"則以下式求之：

$$L_x = (l_x + l_{x+1})/2$$

3. 至於 ${}_{\infty}L_{85}$ ，則特以下式求之：

$${}_{\infty}L_{85} = l_{85}/{}_{\infty}m_{85}$$

4. 各歲以上之定常人口"T_x"之計算：

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \cdots\cdots + L_{\infty}$$

5. 平均餘命"$\mathring{e}_x$"之計算：

$$\mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

至於五齡組之函數 ${}_5d_x$ 、${}_5L_x$ 乃由各年齡之各該函數累加得之，而 l_x 、T_x 、$\mathring{e}_x$ 三函數則並非五齡組函數，而係恰滿 x 歲時之函數，故其符號應與單齡函數符號一致。

三、特定死因除外簡易生命表函數定義

特定死因除外簡易生命表各種函數之意義如下：

（一）死亡機率[${}_nq_x^{(-i)}$]：i 種特定死因除外，x 歲者達到 x+n 歲前可能遭受死亡

之機率。

（二）生存數[$l_x^{(-i)}$]：i 種特定死因除外，一定之出生人數〔通常基數($l_0^{(-i)}$)定為 100,000 人〕，其到達某年齡（x 歲）時尚生存的人數。

（三）死亡數[${}_n d_x^{(-i)}$]：i 種特定死因除外，x 歲時之生存數在達到 x+n 歲前之死亡人數。

（四）定常人口[${}_n L_x^{(-i)}$]：i 種特定死因除外，x 歲至 x+n 歲年齡組距間之定常人口數。

[$T_x^{(-i)}$]：i 種特定死因除外，由 x 歲至所有以後各歲之定常人口總數。

（五）平均餘命[$\overset{\circ}{e}_x^{(-i)}$]：i 種特定死因除外，年滿 x 歲者平均尚可期望生存之年數，故又稱為「預期壽命」。

四、特定死因除外簡易生命表之編算方法

特定死因除外簡易生命表之編算方法，與一般簡易生命表之編算方法大致相同，茲將其內容摘要敘述如下：

（一）基礎資料：

1. 基礎人口：戶籍統計之年中人口數按下列年齡分組

（1）1、2、3、4 歲為單一年齡。

（2）5 歲以上至 84 歲為五歲組。

（3）85 歲以上者合併為一組。

2. 死亡數($D_x^{(i)}$)：特定死因死亡數按下列月、年齡別分組

（1）零歲死亡人口數分為零個月、一個月、二個月、三個月及六個月之月別死亡數。

（2）1、2、3、4 歲為單一年齡死亡數。

（3）5 歲以上至 84 歲為五歲組死亡數。

（4）85 歲以上者合併為一組。

3. 出生數：當年及前一年按發生日期登記之月別出生數。

（二）特定死因除外簡易生命表函數之計算：

1. 根據臺閩地區簡易生命表中年齡別生存機率 p_x，計算第 i 項死因除外死亡機率 $q_x^{(-i)}$，其計算公式如下：

$$q_x^{(-i)} = q_x\left(\frac{D_x - D_x^{(i)}}{D_x}\right)$$

2. 生存數 $l_x^{(-i)}$ 之計算：

$$l_{x+1}^{(-i)} = l_x^{(-i)} \times p_x^{(-i)}$$

3. 死亡數 $d_x^{(-i)}$ 之計算：

$$d_x^{(-i)} = l_x^{(-i)} - l_{x+1}^{(-i)}$$

4. 定常人口 $L_x^{(-i)}$，$T_x^{(-i)}$ 之計算：

$$L_x^{(-i)} = (l_x^{(-i)} + l_{x+1}^{(-i)})/2$$

$$T_x^{(-i)} = L_x^{(-i)} + L_{x+1}^{(-i)} + L_{x+2}^{(-i)} + \cdots\cdots + L_\infty^{(-i)}$$

5. 平均餘命 $\mathring{e}_x^{(-i)}$ 之計算：

$$\mathring{e}_x^{(-i)} = \frac{T_x^{(-i)}}{l_x^{(-i)}}$$